अर्थशास्त्र में सांख्यिकी

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

क्यू आर (QR) कोड से संबद्ध ई-सामग्री प्राप्त करने के लिए मार्गदर्शिका

प्रत्येक अध्याय के ऊपर कोने में स्थित कोड बॉक्स को क्विक रिस्पांस कोड – क्यू आर (QR) कोड कहते हैं। यह क्यू आर कोड आपको अध्याय में दिए गए विषयों से संबंधित ई-सामग्री, जैसे ऑडियो, वीडियो, मल्टीमीडिया, पाठ्य-सामग्री आदि को प्राप्त करने में सहायता करेगा। पहला क्यू आर कोड संपूर्ण ई-पाठ्यपुस्तक प्राप्त करने के लिए है। बाद में प्रत्येक अध्याय में दिए गए क्यू आर कोड उस अध्याय से संबंधित ई-सामग्री प्राप्त करने में मदद करेंगे। यह कोड आपको आनंदपूर्ण तरीके से सीखने में मदद करेंगे।

अपने मोबाइल फ़ोन या टेबलेट द्वारा निम्नवत् चरणों का पालन करें और ई-सामग्री प्राप्त करें।

प्ले स्टोर से क्यू आर कोड स्कैनर एप इंस्टॉल करें और इसे खोलें	क्यू आर कोड स्कैनिंग विंडो को तैयार रखें	स्कैनर को क्यू आर कोड के सामने रखें	लिंक को सिलेक्ट एवं क्लिक करें	उपलब्ध ई-सामग्री का प्रयोग करें

कंप्यूटर या लैपटॉप पर ई-सामग्री प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित कदम उठाएँ

1. फ़ायरफ़ॉक्स ( ), क्रोम ( ) आदि वेब ब्राउज़र खोलें।
2. ई-पाठशाला वेबसाइट पर जाएँ (http//:epathshala.nic.in)।
3. 'एक्सेस ई-सामग्री' वाले बॉक्स पर क्लिक करें।
4. प्रत्येक क्यू आर कोड ( ) के नीचे दिए गए अक्षरांकीय कोड को टंकित करें।
5. अब जो लिंक प्रस्तुत हुए हैं, उनके प्रयोग से ई-सामग्री खोजें।

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

11099

विद्यया ऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ISBN 81-7450-521-0

प्रथम संस्करण
मार्च 2006 फाल्गुन 1927

पुनर्मुद्रण
नवंबर 2007 कार्तिक 1929
मार्च 2009 फाल्गुन 1930
जनवरी 2010 माघ 1931
जनवरी 2011 पौष 1932
दिसंबर 2015 पौष 1937
दिसंबर 2016 पौष 1938
प्.ारवरी 2018 माघ 1939
दिसंबर 2018 अग्रहायण 1940

PD 25T RSP

₹ ??.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा हरिहर प्रिंटर्स, जी-139, हीरावाला इंडस्ट्रियल एरिया, रोड़ नं. 1 कनोटा, आगरा रोड, जयपुर द्वारा मुद्रित।

एन सी ई आर टी के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलूरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकटः धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : एम. सिराज अनवर
मुख्य संपादक : श्वेता उप्पल
मुख्य व्यापार प्रबंधक : गौतम गांगुली
मुख्य उत्पादन अधिकारी : अरुण चितकारा
संपादक : मरियम बारा
उत्पादन सहायक : मुकेश गौड़

चित्रांकन
सरिता वर्मा माथुर

आवरण
श्वेता राव

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिये। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाये हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखाने के दौरान अपने अनुभवों पर विचार करने का कितना अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नये ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किये जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिये ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है जितनी वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिये नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिये पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिये उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस, और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिये बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् सामाजिक विज्ञान पाठ्यपुस्तक सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर हरि वासुदेवन और अर्थशास्त्र पाठ्यपुस्तक समिति के मुख्य सलाहकार प्रोफ़ेसर तापस मजूमदार की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम

माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रोफ़ेसर मृणाल मीरी एवं प्रोफ़ेसर जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित निगरानी समिति (मॉनीटरिंग कमेटी) के सदस्यों को अपना मूल्यवान समय और सहयोग देने के लिए धन्यवाद देते हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों व सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
20 दिसंबर 2005

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

अध्यक्ष, सामाजिक विज्ञान पाठ्यपुस्तक सलाहकार समिति

हरि वासुदेवन, प्रोफ़ेसर, इतिहास विभाग, कलकत्ता विश्वविद्यालय, कोलकाता।

मुख्य सलाहकार

तापस मजूमदार, एमेरिटस प्रोफ़ेसर, अर्थशास्त्र, जवाहरलाल नेहरू विश्वविद्यालय, नयी दिल्ली।

समिति

एम.एम. गोयल, प्रवाचक, वाणिज्य विभाग, पी.जी.डी.ए.वी. कालेज (एम), दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।

एलाङ्बम बिजय कुमार सिंह, प्राचार्य, अर्थशास्त्र विभाग, मणिपुर विश्वविद्यालय, इम्फाल।

टी. पी. सिन्हा, प्रवाचक, अर्थशास्त्र विभाग, एस. एस. एन. कालेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।

भावना राजपूत, वरिष्ठ प्रवक्ता, अदिति महाविद्यालय, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।

मीरा मलहोत्रा, विभागाध्यक्ष, अर्थशास्त्र, मार्डन स्कूल, बाराखम्बा रोड, नई दिल्ली।

सुधीर कुमार, प्रवाचक, अनुग्रह नारायण सिन्हा सामाजिक अध्ययन संस्थान, पटना।

हिंदी अनुवादक

अमर एस. सचान, अनुवादक, म.न. 189, सेक्टर 6, आर.के. पुरम, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक

नीरजा रश्मि, प्रो.फेसर, सामाजिक विज्ञान शिक्षा विभाग, एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

आभार

परिषद् उन सभी लेखकों के प्रति आभार व्यक्त करती है, जिन्होंने पुस्तक के लेखन का कार्य किया है। हम जे. खुंतिया, वरिष्ठ प्रवक्ता, स्कूल ऑफ करेस्पोंडैस कोर्सेस, दिल्ली विश्वविद्यालय; एम.वी. श्रीनिवासन, प्रवक्ता सा.वि.मा.शि.वि., रा.शै.अ.प्र.प.; जया सिंह, प्रवक्ता, सा.वि.मा.शि.वि.; रा.शै.अ.प्र.प. के भी आभारी हैं, जिन्होंने पुस्तक को अंतिम रूप देने में सहायता की।

हम इनके प्रति आभार व्यक्त करते हैंः डी.डी. नौटियाल, पूर्व सचिव एवं भाषाविद् वैज्ञानिक, तकनीकी शब्दावली आयोग; ओ.पी. अग्रवाल, प्रोफ़ेसर (अवकाश प्राप्त), मेरठ विश्वविद्यालय; एच.के. गुप्ता, बाबूराम राजकीय सर्वोदय बाल विद्यालय, शाहदरा, दिल्ली; ए.एस. गर्ग, उपप्रधानाचार्य, राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, गांधीनगर दिल्ली; कांता जोशी, पी.जी.टी. (अर्थशास्त्र), राजकीय कन्या उ.मा. विद्यालय, नं.2, किदवई नगर, नई दिल्ली; लीना सिंह, पी.जी.टी. (अर्थशास्त्र), केंद्रीय विद्यालय, ए.जी.सी.आर., दिल्ली; वीणा गुप्ता, पी.जी.टी. (अर्थशास्त्र), सर्वोदय कन्या विद्यालय नं.1, नई दिल्ली; एम. एम. गोयल, प्रवाचक, वाणिज्य विभाग, पी.जी.डी.ए.वी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, जिन्होंने अनुवाद के पुनरीक्षण हेतु आयोजित कार्यशालाओं में भाग लिया और अपना बहुमूल्य योगदान दिया।

पुस्तक के विकास में सहयोग के लिए हम सविता सिन्हा, प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष, सामाजिक विज्ञान एवं मानविकी शिक्षा विभाग के प्रति विशेष रूप से आभार व्यक्त करते हैं जिन्होंने हर संभव सहयोग दिया।

पुस्तक के विकास के विभिन्न चरणों में सहयोग के लिए अयाज़ अहमद अंसारी, अमजद हुसैन, गिरीश गोयल और उत्तम कुमार, डी.टी.पी. आपरेटर; विभोर सिंह, प्रूफरीडर; विनय शंकर पाण्डेय, कॉपी एडिटर; दिनेश कुमार, इंचार्ज कंप्यूटर कक्ष के भी हम आभारी हैं। प्रकाशन विभाग द्वारा हमें पूर्ण सहयोग एवं सुविधाएँ प्राप्त हुईं, इसके लिए हम उनका आभार व्यक्त करते हैं।

विषय-सूची

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता**

और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

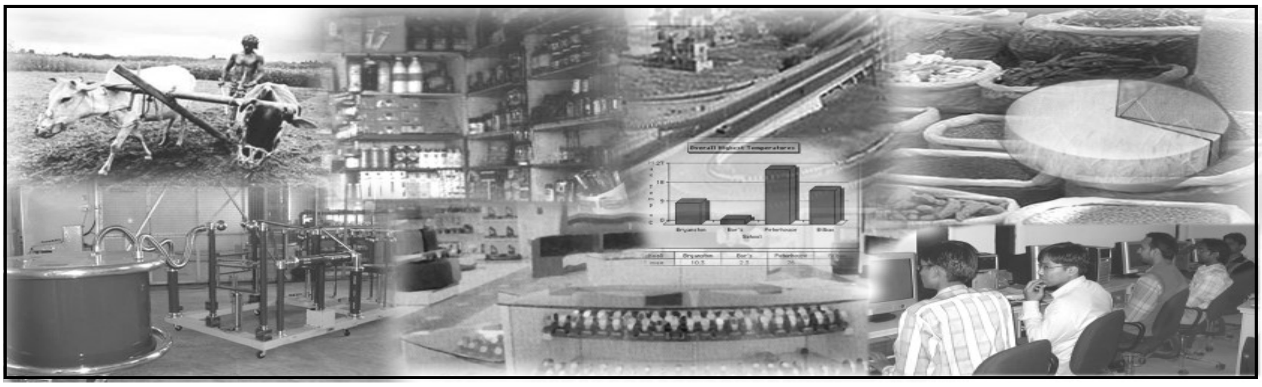
1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

11099CH01

अध्याय

1

परिचय



> **इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे किः**
> - अर्थशास्त्र की विषय-वस्तु के बारे में जान सकें;
> - समझ सकें कि अर्थशास्त्र उपभोग, उत्पादन तथा वितरण में आर्थिक क्रियाओं के अध्ययन से किस प्रकार संबंधित है;
> - जान सकें कि उपभोग, उत्पादन तथा वितरण की व्याख्या में सांख्यिकी का ज्ञान कैसे सहायक हो सकता है;
> - आर्थिक क्रियाओं की बेहतर समझ के लिए सांख्यिकी के प्रयोगों के बारे में सीख सकें।

1. **अर्थशास्त्र क्यों?**

विद्यालय की पूर्ववर्ती कक्षाओं में संभवतः अर्थशास्त्र आपका एक विषय रहा होगा। आपको यह बताया गया होगा कि विषय मुख्यतः एल्फ्रेड मार्शल (आधुनिक अर्थशास्त्र के एक प्रवर्तक) के द्वारा कहे गए वाक्यांश जीवन के सामान्य कारोबार के संदर्भ में मनुष्य के अध्ययन से संबंधित है। आइए, समझें कि इसका तात्पर्य क्या है?

जब आप वस्तुएँ खरीदते हैं (ताकि आप अपनी व्यक्तिगत, अपने परिवार की अथवा उन अन्य व्यक्तियों की आवश्यकताओं को संतुष्ट कर सकें, जिन्हें आप उपहार देना चाहते हैं), तब आप **उपभोक्ता** कहलाते हैं।

जब आप वस्तुओं को स्वयं के लाभ के लिए बेचते हैं (आप दुकानदार हो सकते हैं), तब आप **विक्रेता** कहलाते हैं।

जब आप वस्तुओं का उत्पादन करते हैं (आप किसान अथवा विनिर्माता हो सकते हैं) या सेवाएँ प्रदान करते हैं (आप डॉक्टर, कुली, टैक्सी चालक या वस्तुओं के परिवहन-संचालक हो सकते हैं), तो आप **उत्पादक** कहलाते हैं।

जब आप कोई नौकरी करते हैं अर्थात् दूसरों के लिए कार्य करते हैं, जिसके लिए आपको पारिश्रमिक दिया जाता है (आपको किसी ने काम पर रखा हो, जो आपको मज़दूरी या वेतन देता हो), तब आप **कर्मचारी** कहलाते हैं।

जब आप भुगतान लेकर अन्य व्यक्तियों को सेवा प्रदान करते हैं (आप डॉक्टर, वकील, बैंकर, टैक्सी चालक या सामान-वाहक हो सकते हैं), तब आप **नियोक्ता** कहलाते हैं।

इन सभी स्थितियों में आप किसी आर्थिक क्रिया में **लाभकारी रूप से नियोजित** कहे जाएंगे। **आर्थिक क्रियाएँ** वे होती हैं, जो धन प्राप्त करने के लिए की जाती हैं। **जीवन के आम कारोबार** से अर्थशास्त्रियों का यही तात्पर्य है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- अपने परिवार के सदस्यों के विभिन्न क्रियाकलापों की सूची बनाएँ। क्या आप उन्हें आर्थिक क्रियाकलाप कहेंगे? कारण बताएँ।
- क्या आप स्वयं को एक उपभोक्ता मानते हैं? क्यों?

बिना दिए कुछ भी नहीं मिलता

यदि आपने कभी अलादीन और उसके जादुई चिराग के बारे में सुना हो तो आप इस बात से सहमत होंगे कि अलादीन एक भाग्यशाली व्यक्ति था। वह जब भी, और जो भी वस्तु चाहता था, उसे अपने जादुई चिराग को रगड़ना पड़ता था और तुरंत ही उसकी इच्छाओं को पूरा करने के लिए एक जिन्न प्रकट हो जाता था। जब वह रहने के लिए एक महल की इच्छा करता, तब जिन्न उसी क्षण उसके लिए महल बना देता था। जब उसने राजा की बेटी का हाथ माँगने के लिए उस के लिए बहुमूल्य उपहारों की माँग की, तो पलक झपकते ही वे उसे मिल गए।

वास्तविक जीवन में हम अलादीन की तरह भाग्यशाली नहीं हो सकते। यद्यपि, हमारी इच्छाएँ उसी की तरह असीमित हैं, परंतु हमारे पास कोई जादुई चिराग नहीं है। उदाहरणार्थ, आप अपने जेब खर्च को ही ले लीजिए। यदि आपके पास जेब खर्च अधिक होता, तो आप लगभग अपनी सभी इच्छित वस्तुएँ खरीद सकते थे। लेकिन, चूँकि आपका जेब खर्च सीमित होता है, अतः आप उसी वस्तु को चुनते हैं, जिन्हें आप सबसे ज्यादा आवश्यक मानते हैं। यही अर्थशास्त्र का आधारभूत सबक है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- क्या आप स्वयं कुछ अन्य ऐसे उदाहरणों की कल्पना कर सकते हैं, जहाँ व्यक्ति को यह चुनना होता है कि वह वर्तमान कीमतों पर अपनी निश्चित आय से किन वस्तुओं को और उनकी कितनी मात्रा खरीद सकता है?
- यदि वर्तमान कीमतें बढ़ जाएँ तब क्या होगा?

अभाव सभी आर्थिक समस्याओं की जड़ है। यदि अभाव न होता तो कोई आर्थिक समस्या ही न होती। तब आपको अर्थशास्त्र पढ़ने की आवश्यकता भी नहीं पड़ती। हम अपने दैनिक जीवन में, विभिन्न प्रकार के अभावों का सामना करते हैं। रेलवे आरक्षण-खिड़कियों पर लगी लंबी कतारें, भीड़ भरी बसें एवं रेलगाड़ियाँ, अत्यावश्यक वस्तुओं की कमी, किसी नई फिल्म को देखने के लिए टिकट की भारी भीड़ आदि सभी बातें अभाव को व्यक्त करती हैं। हम अभाव का सामना इसलिए करते हैं क्योंकि जो वस्तुएँ हमारी आवश्यकता की पूर्ति करती हैं, उनकी उपलब्धता सीमित होती है। क्या आप अभाव के कुछ अन्य उदाहरणों की कल्पना कर सकते हैं?

उत्पादकों के पास जो संसाधन होते हैं, वे भी सीमित होते हैं और साथ ही उनके वैकल्पिक प्रयोग भी होते हैं। आप भोजन का ही उदाहरण लें, जिसे आप प्रतिदिन खाते हैं। यह आपके पोषण की ज़रूरतों को पूरा करता है। खेती के कामों में लगे हुए किसान फसलें उगाते हैं और उनसे आपका

भोजन उत्पादित होता है। समय विशेष पर कृषि संसाधनों, जैसे खेत की भूमि, श्रम, पानी, उर्वरक आदि की उपलब्धता निश्चित होती है। इन सभी संसाधनों के वैकल्पिक प्रयोग भी होते हैं। इन्हीं संसाधनों का प्रयोग खाद्येतर फसलों जैसे रबर, कपास, जूट आदि के उत्पादन में भी किया जा सकता है। इस प्रकार, संसाधनों का वैकल्पिक प्रयोग उन वस्तुओं के बीच चयन की समस्या को जन्म देता है, जिन्हें इनके द्वारा उत्पादित किया जा सकता है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- आपकी कौन-कौन सी आवश्यकताएँ हैं? आप उनमें से कितनों को पूरा कर सकते हैं? उनमें से कितनी अपूर्ण रह जाती हैं? आप उन्हें पूरा कर पाने में क्यों असमर्थ रहते हैं?
- आप अपने दैनिक जीवन में कितने प्रकार के अभावों का सामना करते हैं? उनके कारणों का पता लगाएँ।

उपभोग, उत्पादन और वितरण

यदि आपने ध्यान से सोचा हो, तो यह महसूस किया होगा कि अर्थशास्त्र विभिन्न प्रकार की आर्थिक क्रियाकलापों में संलग्न मनुष्य का अध्ययन है। इसके लिए, आपको विविध आर्थिक क्रियाकलापों जैसे, उत्पादन, उपभोग, वितरण आदि के बारे में विश्वसनीय तथ्यों को जानने की आवश्यकता होती है। अर्थशास्त्र के अध्ययन

को प्रायः तीन भागों में बाँटा जाता हैः उपभोग, उत्पादन एवं वितरण। हम जानना चाहते हैं कि उपभोक्ता यह निर्णय कैसे करता है कि वह अपनी निश्चित आय और ज्ञात कीमतों (वस्तुओं की) को देखते हुए अनेक वैकल्पिक वस्तुओं में से किन वस्तुओं को खरीदे। यह उपभोग का अध्ययन है।

ठीक इसी प्रकार हम यह भी जानना चाहते हैं कि कोई उत्पादक, जिसे अपनी लागत और कीमतें ज्ञात हैं, इसका चयन कैसे करता है कि बाजार के लिए क्या उत्पादन करे। यह उत्पादन का अध्ययन है।

अंत में, हम यह जानना चाहते हैं कि राष्ट्रीय आय या कुल आय, जो देश में उत्पादन से प्राप्त होती है, (जिसे सकल घरेलू उत्पाद कहते हैं) मजदूरी (एवं वेतन), लाभ तथा ब्याज (अंतर्राष्ट्रीय व्यापार एवं निवेश से प्राप्त आय को छोड़कर) को कैसे वितरित किया जाता है। यह वितरण का अध्ययन है।

अर्थशास्त्र के इन तीन परंपरागत विभाजनों, जिनके तथ्यों के बारे में हम जानना चाहते हैं, के साथ आधुनिक अर्थशास्त्र में देश की कुछ आधारभूत समस्याओं को भी विशेष अध्ययन के लिए सम्मिलित करना होगा।

उदाहरणार्थ, आप यह जानना चाहेंगे कि हमारे समाज के कुछ परिवारों के पास दूसरों की अपेक्षा अधिक आय अर्जित करने की क्षमता क्यों और कितनी होती है। आप यह भी जानना चाहेंगे कि हमारे देश में कितने लोग वास्तविक रूप से गरीब हैं, कितने मध्यम- वर्ग के हैं और कितने लोग अपेक्षाकृत धनी हैं, आदि। आप यह भी जानना चाहेंगे कि ऐसे निरक्षर लोग कितने हैं, जिन्हें नौकरी नहीं मिलेगी क्योंकि उसके लिए शिक्षा की आवश्यकता है, कितने लोग बहुत अधिक शिक्षित हैं, जिन्हें अच्छी नौकरियों के अवसर प्राप्त होंगे आदि। दूसरे शब्दों में, आप ऐसे तथ्यों की अधिकाधिक संख्यात्मक जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे जिनसे समाज में गरीबी एवं असमानताओं के प्रश्नों का उत्तर मिल सके। यदि आप यह नहीं चाहते कि गरीबी और समाज में व्याप्त घोर विषमताएँ जारी रहें और समाज की

इन बुराइयों के विरुद्ध कुछ किया जाए, तो इस विषय में सरकार द्वारा कोई भी उपयुक्त कार्रवाई करने की माँग से पहले इन सभी संबंधित तथ्यों की जानकारी लेना आपके लिए आवश्यक होगा। यदि आप तथ्यों को जानें तो आपके लिए अपने जीवन को भी अधिक बेहतर ढंग से नियोजित करना संभव होगा। ठीक उसी प्रकार से, आपने हमारे देश के लिए घातक खतरों के विषय में सुना होगा और कुछ ने तो इनका सामना भी किया होगा जो मनुष्य के 'आम जीवन के कारोबार' को प्रभावित करते हैं, जैसे सुनामी, भूकंप तथा बर्ड फ्लू आदि विपदाएँ। अर्थशास्त्री इन सभी बातों पर विचार कर सकते हैं, यदि उन्हें इन विपदाओं पर होने वाले खर्च से संबंधित तथ्यों को व्यवस्थित और सही तरीके से संगृहीत करने और एक साथ प्रस्तुत करने का ज्ञान हो तो। अब आप संभवतः इस पर विचार कर सकते हैं और स्वयं से भी पूछ सकते हैं कि क्या यह सही है कि आधुनिक अर्थशास्त्र के अध्ययन में उन मूलभूत कौशलों का समावेश है जो कई प्रकार के उपयोगी अध्ययनों के लिए आवश्यक हैं, जैसे निर्धनता का मापन, आय का वितरण, आय अर्जन के अवसरों का शिक्षा से संबंध, पर्यावरण-संबंधी विपदाओं का हमारे जीवन पर प्रभाव आदि।

स्पष्टतः यदि आप इस दिशा में सोचें तो आप यह समझ पाएँगे कि आधुनिक अर्थशास्त्र के सभी आधुनिक पाठ्यक्रमों में सांख्यिकी को शामिल करने की आवश्यकता हमें क्यों पड़ी।

क्या अब आप अर्थशास्त्र की निम्नलिखित परिभाषा से सहमत हैं, जिसका प्रयोग अधिकांश अर्थशास्त्री करते हैं?

व्यक्ति और समाज अपनी आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए तथा समाज के विभिन्न व्यक्तियों एवं समूहों में उपभोग हेतु वितरित करने के लिए इसका चुनाव कैसे करे कि वैकल्पिक प्रयोग वाले अल्प संसाधनों का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन में हो सके, अर्थशास्त्र इसका अध्ययन है।

क्रियात्मक गतिविधि

- उपर्युक्त विवेचना के आधार पर क्या आप कह सकते हैं कि अब यह परिभाषा थोड़ी अपर्याप्त-सी लगती है? इसमें क्या कमी है?

2. अर्थशास्त्र में सांख्यिकी

पिछले अनुच्छेद में आपको किसी देश की मूलभूत समस्याओं से संबंधित कुछ विशेष अध्ययनों के बारे में बताया गया था। इस अध्ययन के लिए आवश्यकता है कि हम आर्थिक तथ्यों को संख्याओं के रूप में भली-भाँति जानें। इस प्रकार के आर्थिक तथ्यों को **आँकड़े** भी कहते हैं।

इन आर्थिक समस्याओं के बारे में आँकड़े संग्रह करने का उद्देश्य इन समस्याओं के विभिन्न कारणों को जानना और उनकी व्याख्या करना है। दूसरे शब्दों में, हम उनका विश्लेषण करने की कोशिश करते हैं। उदाहरणार्थ, जब हम निर्धनता के कारण उत्पन्न कठिनाइयों का **विश्लेषण** करते हैं, तब हम इसकी व्याख्या विभिन्न कारकों जैसे बेरोजगारी, लोगों की निम्न उत्पादकता, पिछड़ी हुई प्रौद्योगिकी आदि, के रूप में करने की कोशिश करते हैं।

परंतु निर्धनता के विश्लेषण का तब तक कोई अर्थ नहीं है जब तक हम इसे दूर करने के उपायों को खोज न लें। इसलिए हम उन उपायों को खोजने का प्रयास कर सकते हैं जो आर्थिक समस्या को सुलझाने में सहायक हों। अर्थशास्त्र में ऐसे उपायों को **नीतियों** के रूप में जाना जाता है।

अतः क्या अब आप समझ गए कि किसी आर्थिक समस्या के विभिन्न कारकों से संबंधित आँकड़ों के बिना उस समस्या का कोई विश्लेषण संभव नहीं? इसलिए ऐसी स्थिति में, इन्हें हल करने के लिए नीतियों का निर्माण नहीं किया जा सकता। यदि हाँ, तो आप काफी हद तक अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के बीच के आधारभूत संबंध को समझ चुके हैं।

3. सांख्यिकी क्या है?

अब आप संभवतः सांख्यिकी के संदर्भ में कुछ अधिक जानने को उत्सुक हों। आप यह जानना चाहेंगे कि सांख्यिकी की विषय-वस्तु क्या है?

सांख्यिकी का संबंध आँकड़ों के एकत्रीकरण, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषण से है। ये आँकड़े भौतिकी शास्त्र, समाजशास्त्र, मनोविज्ञान या किसी भी क्षेत्र से हो सकते हैं।

यहाँ हमारा संबंध अर्थशास्त्र के क्षेत्र के आँकड़ों से है। अर्थशास्त्र के अधिकतर आँकड़े मात्रात्मक होते हैं।

उदाहरण के लिए, अर्थशास्त्र में यह कथन कि "भारत में चावल का उत्पादन वर्ष 1974-75 में 39.58 मिलियन टन था, जो वर्ष 2013-14 में बढ़कर 106.5 मिलियन टन हो गया" यह मात्रात्मक आँकड़े हैं।

मात्रात्मक आँकड़ों के साथ ही, अर्थशास्त्र में गुणात्मक आँकड़ों का भी प्रयोग होता है। इस प्रकार की सूचना की मुख्य विशेषता यह होती है कि इसमें किसी व्यक्ति-विशेष या व्यक्तियों के समूह विशेष के ऐसे महत्त्वपूर्ण गुणों की व्याख्या होती है, जिन्हें मात्रात्मक रूप से तो नहीं मापा जा सकता लेकिन यथासंभव सही रूप से आलेखित करना आवश्यक होता है। उदाहरण के तौर पर 'लिंग' को ही लें। इसके द्वारा किसी व्यक्ति में पुरुष/स्त्री अथवा लड़का/लड़की के रूप में भेद किया जाता है। प्रायः किसी व्यक्ति के किसी गुण की कोटियों के बारे में सूचना देना संभव और उपयोगी होता है, जैसे अच्छा/बुरा, अस्वस्थ/स्वस्थ/अधिक स्वस्थ, अकुशल/कुशल/अत्यधिक कुशल आदि)। इस प्रकार की गुणात्मक सूचना या सांख्यिकी का अर्थशास्त्र तथा अन्य सामाजिक विज्ञानों में प्रायः प्रयोग किया जाता है। इन्हें मात्रात्मक सूचनाओं की भाँति ही (कीमत, आय, कर-भुगतान आदि) संकलित और व्यवस्थित रूप से संगृहीत किया जाता है, चाहे वह एक व्यक्ति के लिए हो या फिर व्यक्तियों के समूह के लिए।

अगले अध्यायों में आप अध्ययन करेंगे कि सांख्यिकी का संबंध आँकड़ों के संग्रहण एवं व्यवस्थापन से है। इसका अगला चरण आँकड़ों को सारणीबद्ध, आरेखी एवं आलेखी रूपों में प्रस्तुत करना है। इसके पश्चात् इन आँकड़ों को माध्य, प्रसरण, मानक विचलन आदि उन विभिन्न संख्यात्मक सूचकांकों का परिकलन करके संक्षिप्त किया जाता है, जो सूचना के संगृहीत समुच्चय की व्यापक विशेषताओं को दर्शाते हैं।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- मात्रात्मक एवं गुणात्मक आँकड़ों के दो उदाहरणों के बारे में सोचें।
- निम्नलिखित में से किसके द्वारा आपको गुणात्मक आँकड़े उपलब्ध होंगेः सौंदर्य, बुद्धि, अर्जित आय, किसी विषय में प्राप्तांक, गाने की योग्यता तथा अधिगम कौशल?

4. सांख्यिकी क्या करती है?

अब तक आप जान चुके होंगे कि किसी अर्थशास्त्री के लिए सांख्यिकी एक ऐसा अपरिहार्य साधन है, जो किसी आर्थिक समस्या को समझने में उसकी सहायता करता है। इसकी विभिन्न विधियों का प्रयोग करते हुए किसी आर्थिक समस्या के कारणों को गुणात्मक एवं मात्रात्मक तथ्यों की सहायता से खोजने का प्रयास किया जाता है। एक बार जब समस्या के कारणों का पता चल जाता है, तब इससे निपटने के लिए निश्चित नीतियों का निर्माण करना सरल हो जाता है।

परंतु सांख्यिकी का क्षेत्र इससे कहीं अधिक विस्तृत है। यह किसी अर्थशास्त्री को आर्थिक तथ्यों को यथातथ्य तथा निश्चित रूप में प्रस्तुत करने योग्य बनाता है, जो दिए गए कथन को सही ढंग से समझने में सहायता करता है। जब आर्थिक तथ्यों को सांख्यिकीय रूप में व्यक्त किया जाता है तब वे यथार्थ तथ्य बन जाते हैं। यथार्थ तथ्य अस्पष्ट कथनों की अपेक्षा अधिक विश्वसनीय होते हैं। उदाहरण के लिए, एक यथा तथ्य संख्या बताते हुए यह कहना कि "कश्मीर में हाल ही में

आए भूकंप के दौरान 310 लोगों की मौत हुई" कहीं अधिक तथ्यात्मक है, अतः यह सांख्यिकीय आँकड़ा है। जबकि यह कहना कि सैकड़ों लोगों की मौत हुई, सांख्यिकीय आँकड़ा नहीं है।

सांख्यिकी, आँकड़ों के समूह को कुछ संख्यात्मक मापों (जैसे माध्य, प्रसरण आदि जिनके बारे में आप आगे पढ़ेंगे) के रूप में संक्षिप्त करने में सहायता करती है। ये संख्यात्मक माप आँकड़ों के संक्षिप्तीकरण में सहायता करते हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी आँकड़े में लोगों की संख्या बहुत अधिक है, तो आपके लिए उन सबकी आय को याद रख पाना असंभव है। फिर, किसी व्यक्ति के लिए सांख्यिकीय रूप से प्राप्त संक्षिप्त अंकों, जैसे औसत आय, को याद रखना आसान है। इस प्रकार, सांख्यिकी के द्वारा आँकड़ों के समूह के विषय में सार्थक एवं समग्र सूचनाएँ प्रस्तुत की जाती हैं।

प्रायः सांख्यिकी का प्रयोग विभिन्न आर्थिक कारकों के बीच संबंधों को ज्ञात करने के लिए किया जाता है। किसी अर्थशास्त्री की रुचि को यह जानने में हो सकती है कि जब किसी वस्तु की कीमत में कमी अथवा वृद्धि होती है तो उसकी माँग पर क्या प्रभाव पड़ता है? या फिर, उस वस्तु की अपनी ही कीमतों में परिवर्तन से उसकी पूर्ति प्रभावित होगी? या, जब लोगों की औसत आय बढ़ती है तो क्या उनके उपभोग-व्यय में वृद्धि होती है? या, जब सरकारी व्यय बढ़ जाता है, तो सामान्य मूल्य-स्तर पर क्या प्रभाव पड़ता है? ऐसे प्रश्नों का उत्तर तभी दिया जा सकता है जब विभिन्न आर्थिक घटकों के बीच किसी प्रकार का परस्पर संबंध विद्यमान हो, जिनकी व्याख्या ऊपर की जा चुकी है। इस प्रकार का कोई परस्पर संबंध विद्यमान है या नहीं, इसे उन आँकड़ों में सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग करके सरलता से सत्यापित किया जा सकता है। कभी-कभी अर्थशास्त्री उनके बीच एक निश्चित संबंध की कल्पना करके इसका परीक्षण कर सकते हैं कि संबंध के बारे में उनकी पूर्वधारणा वैध है या नहीं। अर्थशास्त्री ऐसा केवल सांख्यिकीय तकनीकों का प्रयोग करके ही कर सकते हैं।

किसी अन्य स्थिति में, अर्थशास्त्री किसी अन्य कारक में परिवर्तन के फलस्वरूप किसी एक आर्थिक कारक में परिवर्तनों का पूर्वानुमान लगाने में रुचि रख सकते हैं। उदाहरणार्थ, उनकी रुचि भविष्य की राष्ट्रीय आय पर आज के निवेश के प्रभाव को जानने में हो सकती है। इस प्रकार की कोई भी कार्य-प्रक्रिया सांख्यिकी के ज्ञान के बिना नहीं की जा सकती है।

कभी-कभी योजनाओं एवं नीतियों के निर्माण के लिए भविष्य की प्रवृत्तियों के ज्ञान की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, एक आर्थिक योजनाकार वर्ष 2005 में यह निर्णय करता है कि 2010 में अर्थव्यवस्था में कितना उत्पादन होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, यह जानना आवश्यक होगा कि वर्ष 2010 के लिए उत्पादन योजना निश्चित करने के लिए वर्ष 2010 में अपेक्षित उपभोग स्तर क्या होगा? ऐसी स्थिति में, कोई व्यक्ति वर्ष 2010 के उपभोग के अनुमान के आधार पर निर्णय ले सकता है। विकल्प के रूप में, वह वर्ष 2010 में उपभोग के पूर्वानुमान के लिए सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग कर सकता है। ऐसा पिछले वर्षों के अथवा हाल के कुछ वर्षों के सर्वेक्षण से प्राप्त उपभोग-आँकड़ों के आधार पर हो सकता है। इस प्रकार, सांख्यिकीय विधियाँ ऐसी उपयुक्त आर्थिक नीतियों के गठन में सहायता देती हैं, जिनसे आर्थिक समस्याओं का समाधान हो सकता है।

5. सारांश

आजकल हम गंभीर आर्थिक समस्याओं, जैसे मूल्यवृद्धि, बढ़ती जनसंख्या, बेरोजगारी, निर्धनता आदि के विश्लेषण में सांख्यिकी का अधिकाधिक प्रयोग कर रहे हैं, ताकि इन समस्याओं को हल करने के उपाय ढूँढ़े जा सकें। इसके अतिरिक्त, यह आर्थिक समस्याओं के समाधान में इन नीतियों

के प्रभाव का मूल्यांकन करने में भी सहायक है। उदाहरण के लिए, सांख्यिकीय तकनीकों का प्रयोग करके निरंतर बढ़ती जनसंख्या पर रोक लगाने के लिए परिवार नियोजन की नीतियाँ प्रभावशाली हैं या नहीं, इसका पता सरलता से लगाया जा सकता है।

आर्थिक नीतियों के निर्णय की प्रक्रिया में सांख्यिकी की एक महत्त्वपूर्ण भूमिका है। उदाहरण के लिए, वर्त्तमान समय में विश्व भर में तेल की बढ़ती कीमतों के कारण यह निर्णय करना आवश्यक हो सकता है कि वर्ष 2010 में भारत को कितना तेल आयात करना चाहिए। तेल के आयात का निर्णय प्रत्याशित घरेलू तेल उत्पादन तथा वर्ष 2010 में तेल की संभावित माँग पर निर्भर होगा। सांख्यिकी के प्रयोग बिना यह ज्ञात नहीं किया जा सकता कि वर्ष 2010 में तेल का प्रत्याशित घरेलू उत्पादन तथा तेल की संभावित माँग क्या होगी? इसलिए, तेल के आयात का निर्णय तब तक नहीं किया जा सकता है, जब तक हमें तेल की वास्तविक आवश्यकता की जानकारी न हो। तेल के आयात के विषय में निर्णय की दृष्टि से यह महत्वपूर्ण जानकारी केवल सांख्यिकी के द्वारा ही प्राप्त की जा सकती है।

सांख्यिकीय विधियाँ सामान्य बुद्धि का स्थानापन्न नहीं हैं!

सांख्यिकी का उपहास करने के लिए एक रोचक कहानी सुनाई जाती है। ऐसा कहा जाता है कि एक बार चार व्यक्तियों का एक परिवार (पति-पत्नी तथा दो बच्चे) नदी पार करने निकले। पिता को नदी की औसत गहराई की जानकारी थी। अतः उसने परिवार के सदस्यों के औसत कद का हिसाब लगाया। चूँकि परिवार के सदस्यों का औसत कद, नदी की औसत गहराई से अधिक था, इसलिए उसने सोचा कि वे सभी सुरक्षित रूप से नदी पार कर सकते हैं। परिणामस्वरूप, नदी पार करते समय परिवार के कुछ सदस्य (बच्चे) पानी में डूब गए।

क्या यह दोष औसतों के परिकलन की सांख्यिकीय विधि का है अथवा औसतों के दुरुपयोग का?

पुनरावर्तन

- हमारी आवश्यकताएँ असीमित हैं, परंतु इन्हें पूरा करने वाली वस्तुओं के उत्पादन में प्रयुक्त होने वाले संसाधन सीमित एवं दुर्लभ हैं। यह दुर्लभता ही आर्थिक समस्याओं की जड़ है।
- संसाधनों के वैकल्पिक प्रयोग होते हैं।
- अपनी विभिन्न आवश्यकताओं की पूर्ति करने के लिए उपभोक्ताओं द्वारा वस्तुओं का क्रय, उपभोग कहलाता है।
- उत्पादकों द्वारा बाजार में बेचने के लिए वस्तुओं का विनिर्माण उत्पादन कहलाता है।
- राष्ट्रीय आय के मजदूरी, लाभ, किराए तथा ब्याज में विभाजन को वितरण कहा जाता है।
- सांख्यिकी के अंतर्गत आँकड़ों का प्रयोग करते हुए आर्थिक संबंधों का पता लगाया जाता है और उनकी सत्यता की जाँच की जाती है।
- सांख्यिकीय साधनों का प्रयोग भावी प्रवृत्तियों के पूर्वानुमान हेतु किया जाता है।
- सांख्यिकीय विधियाँ आर्थिक समस्याओं का विश्लेषण करने तथा उन्हें हल करने के लिए नीतियों के निर्माण में सहायक होती हैं।

अभ्यास

1. निम्नलिखित कथन सही है अथवा गलत? इन्हें तदनुसार चिह्नित करें:
   (क) सांख्यिकी केवल मात्रात्मक आँकड़ों का अध्ययन करती है।
   (ख) सांख्यिकी आर्थिक समस्याओं का समाधान करती है।
   (ग) आँकड़ों के बिना अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का कोई उपयोग नहीं है।
2. बस स्टैंड या बाजार में होने वाले क्रियाकलापों की सूची बनाएँ। इनमें से कितने आर्थिक क्रियाकलाप हैं?
3. सरकार और नीति-निर्माता आर्थिक विकास के लिए उपयुक्त नीतियों के निर्माण के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रयोग करते हैं। दो उदाहरणों सहित व्याख्या कीजिए।
4. ''आपकी आवश्यकताएँ असीमित हैं तथा उनकी पूर्ति करने के लिए आपके पास संसाधन सीमित हैं।'' दो उदाहरणों द्वारा इस कथन की व्याख्या करें।
5. उन आवश्यकताओं का चुनाव आप कैसे करेंगे, जिनकी आप पूर्ति करना चाहेंगे?
6. आप अर्थशास्त्र का अध्ययन क्यों करना चाहते हैं? कारण बताइए।
7. सांख्यिकीय विधियाँ सामान्य बुद्धि का स्थानापन्न नहीं होती! अपने दैनिक जीवन से उदाहरणों द्वारा इस कथन की व्याख्या करें।

अध्याय

2

11099CH02

आँकड़ों का संग्रह

इस अध्याय के अध्ययन के बाद आप इस योग्य होंगे किः

- आँकड़ा-संग्रह का अर्थ और उद्देश्य समझ सकें;
- प्राथमिक एवं द्‌वितीयक स्रोतों के बीच अंतर कर सकें;
- आँकड़ा-संग्रह की विधि समझ सकें;
- जनगणना एवं प्रतिदर्श सर्वेक्षण के बीच अंतर कर सकें;
- प्रतिचयन की प्रविधि से परिचित हो सकें;
- द्‌वितीयक आँकड़ों के कुछ महत्वपूर्ण स्रोतों के बारे में जान सकें।

प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपको अर्थशास्त्र की विषयवस्तु की जानकारी मिली। इसके साथ ही आपने अर्थशास्त्र में सांख्यिकी की भूमिका एवं महत्त्व के बारे में भी पढ़ा। इस अध्याय में आप आँकड़ों के स्रोतों एवं आँकड़ा-संग्रह की विधि के बारे में अध्ययन करेंगे। आँकड़ों के संग्रह का उद्‌देश्य किसी समस्या के स्पष्ट एवं ठोस समाधान के लिए साक्ष्य को दर्शाना है।

अर्थशास्त्र में प्रायः ऐसे कथनों से आपका सामना होता है, जैसे-

"अनेक उतार-चढ़ावों के पश्चात् खाद्‌यान्नों का उत्पादन 1970-71 में 10.8 करोड़ टन से बढ़कर 1978-79 में 13.2 करोड़ टन हो गया, किंतु 1979-80 में फिर से गिर कर 10.8 करोड़ टन हो गया। उसके बाद खाद्‌यान्नों का उत्पादन 2015-16 तक लगातार बढ़ कर 25.2 करोड़ टन हो गया तथा 2016-17 में इसने 27.2 करोड़ टन का आँकड़ा छू लिया।"

आप इस कथन में यह देख सकते हैं कि विभिन्न वर्षों में खाद्‌यान्नों का उत्पादन एक समान नहीं रहा है। यह फसल-दर-फसल तथा वर्ष-दर-वर्ष बदलता रहा है। चूँकि ये मूल्य परिवर्तनशील होते हैं, अतः इन्हें चर कहा जाता है। इन चरों को

प्रायः X, Y, Z आदि अक्षरों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। प्रत्येक चर का मूल्य प्रेक्षण कहलाता है। उदाहरण के लिए - भारत में खाद्यान्न उत्पादन 1970-71 में 108 मिलियन टन से लेकर वर्ष 2016-17 में 272 मिलियन टन के बीच रहा, जैसा कि सारणी में दिखाया गया है। यहाँ पर वर्षों को चर X के द्वारा और भारत में खाद्यान्नों के उत्पादन को (मिलियन टनों में) चर Y के द्वारा प्रस्तुत किया गया हैः

सारणी 2.1

भारत में खाद्यान्नों का उत्पादन (मिलियन टन में)

X	Y
1970-71	108
1978-79	132
1990-91	176
1997-98	194
2001-02	212
2015-16	252
2016-17	272

यहाँ पर चर X तथा Y के मूल्य 'आँकड़े' हैं, जिनके द्वारा हम भारत में खाद्यान्नों के उत्पादन के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकते हैं। खाद्यान्नों के उत्पादन में उतार-चढ़ाव की प्रवृत्ति को जानने के लिए हमें विभिन्न वर्षों के लिए भारत में खाद्यान्न उत्पादन के 'आँकड़ों' की आवश्यकता पड़ती है। आँकड़ा एक ऐसा साधन है, जो सूचनाएँ प्रदान कर समस्या को समझने में सहायक होता है।

आप जानना चाहते होंगे कि ये 'आँकड़े' कहाँ से आते हैं और हम इन्हें कैसे संगृहीत करते हैं? निम्नलिखित अनुभाग में हम आँकड़ों के प्रकार, आँकड़ों को संगृहीत करने की विधि तथा साधनों तथा आँकड़ों के स्रोतों की चर्चा करेंगे।

2. आँकड़ों के स्रोत क्या हैं?

सांख्यकीय आँकड़े दो स्रोतों से प्राप्त किए जा सकते हैं। गणनाकार (वह व्यक्ति जो आँकड़ा संग्रह करता है) जाँच-पड़ताल या पूछताछ करके आँकड़े एकत्र कर सकता है। ऐसे आँकड़े प्राथमिक आँकड़े कहे जाते हैं, चूँकि ये प्रत्यक्ष रूप से प्राप्त की गई जानकारी पर आधारित होते हैं। मान लें कि आप विद्यालयी बच्चों के बीच किसी फिल्मी सितारे की लोकप्रियता की जानकारी लेना चाहते हैं। इस संबंध में वांछित जानकारी लेने के लिए आपको काफी बड़ी संख्या में विद्यालय के छात्रों से प्रश्नों के माध्यम से पूछताछ करनी होगी। इस विधि से आप जो आँकड़े प्राप्त करते हैं, वह प्राथमिक आँकड़ों का एक उदाहरण है।

यदि किसी दूसरी संस्था द्वारा इन आँकड़ों को संगृहीत एवं संशोधित (संवीक्षित एवं सारणीकृत) किया जाता है तो इन्हें 'द्वितीयक आँकड़े' कहते हैं। इन आँकड़ों को या तो प्रकाशित स्रोतों से जैसे सरकारी रिपोर्ट, दस्तावेज, समाचार पत्र, अर्थशास्त्रियों द्वारा लिखित पुस्तकें, या किसी अन्य स्रोत से प्राप्त किया जा सकता है, जैसे वेबसाइट। अतः ये आँकड़े उन स्रोतों के लिए प्राथमिक हैं जो उन्हें पहली बार संगृहीत एवं संसाधित करते हैं, तथा बाद में प्रयोग करने वाले सभी स्रोतों के लिए ये द्वितीयक हैं। द्वितीयक आँकड़ों के उपयोग से समय एवं धन की बचत होती है। उदाहरण के लिए, मान लें छात्रों में किसी सिनेमा कलाकार की लोकप्रियता के बारे में आँकड़ों को एकत्र करने के पश्चात् आप एक रिपोर्ट प्रकाशित करते हैं। यदि आप द्वारा संग्रह किए गए आँकड़ों का उपयोग कोई इसी तरह के किसी अध्ययन के लिए करता है, तो उसके लिए यह द्वितीयक आँकड़े हो जाते हैं।

3. हम आँकड़े कैसे संगृहीत करते हैं?

क्या आप जानते हैं कि कोई विनिर्माता अपने किसी उत्पाद के संबंध में या कोई राजनैतिक पार्टी अपने किसी उम्मीदवार के विषय में कैसे निर्णय करती है? वे उत्पाद-विशेष या उम्मीदवार-विशेष

के बारे में जन- समुदाय से प्रश्नों के माध्यम से सर्वेक्षण करते हैं। इस सर्वेक्षण का उद्देश्य कुछ विशिष्टताओं जैसे कीमत, गुणवत्ता, उपयोगिता (उत्पाद के संबंध में) और लोकप्रियता, ईमानदारी और निष्ठा (उम्मीदवार के संबंध में) के बारे में जानकारी एकत्र करना होता है। सर्वेक्षण का उद्देश्य आँकड़ों को संगृहीत करना होता है। सर्वेक्षण वह विधि है, जिसके द्वारा विभिन्न व्यक्तियों से सूचना एकत्र की जाती है।

सर्वेक्षण के साधनों की तैयारी

सर्वेक्षणों में उपयोग किया जाने वाला सर्वाधिक प्रचलित साधन प्रश्नावली या साक्षात्कार अनुसूची है। प्रश्नावली या तो स्वयं उत्तरदाता द्वारा भरी जाती है या फिर शोधकर्ता (गणनाकार) अथवा प्रशिक्षित जाँचकर्ता द्वारा भरी जाती है। प्रश्नावली या साक्षात्कार अनुसूची तैयार करने में आपको निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिएः

- प्रश्नावली बहुत लम्बी नहीं होनी चाहिए । जहाँ तक संभव हो सके, प्रश्नों की संख्या कम से कम होनी चाहिए। लंबी प्रश्नावली उत्तरदाताओं को हतोत्साहित करती है।
- प्रश्नावली समझने में आसान होनी चाहिए । अस्पष्ट या कठिन शब्दों से बचना चाहिए।
- प्रश्न ऐसे क्रम में व्यवस्थित किए जाने चाहिए कि उत्तर देने वाला व्यक्ति आराम से उत्तर दे सके।
- प्रश्नावली सामान्य प्रश्नों से आरम्भ होकर विशिष्ट प्रश्नों की ओर बढ़नी चाहिए। प्रश्नावली की शुरुआत सामान्य प्रश्नों के साथ होनी चाहिए और विशिष्ट प्रश्न क्रमशः बाद में दिए जाने चाहिए। इससे उत्तरदाता निश्चिन्त हो जाता है। उदाहरणार्थः

गलत प्रश्न

(क) क्या बिजली के प्रभार में वृद्धि को उचित ठहराया जा सकता है?

(ख) क्या आपके क्षेत्र में बिजली की पूर्ति नियमित रहती है?

सही प्रश्न

(क) क्या आपके क्षेत्र में बिजली की पूर्ति नियमित रहती है?

(ख) क्या बिजली के प्रभार में वृद्धि को उचित ठहराया जा सकता है?

- प्रश्न यथातथ्य एवं स्पष्ट होने चाहिए। उदाहरणार्थः

गलत प्रश्न

आप आकर्षक दिखने के लिए अपनी आय का कितना प्रतिशत भाग कपड़ों पर खर्च करते हैं?

सही प्रश्न

आप अपनी आय का कितना प्रतिशत भाग कपड़ों पर खर्च करते हैं?

- प्रश्न अनेकार्थक या अस्पष्ट नहीं होने चाहिए। प्रश्न ऐसे हों ताकि उत्तरदाता शीघ्र, सही एवं स्पष्ट उत्तर देने में सक्षम रहे। उदाहरणार्थः

गलत प्रश्न

क्या आप प्रतिमाह पुस्तकों पर बहुत पैसा खर्च करते हैं?

सही प्रश्न

सही विकल्प पर सही (✓)का निशान लगाएँ।

आप प्रतिमाह पुस्तकों पर कितना खर्च करते हैं?

(क) 200/- रु से कम

(ख) 200/- से 300/- रु के बीच

(ग) 300/- से 400/- रु के बीच

(घ) 400/- रु से अधिक

- प्रश्न दोहरी नकारात्मकता वाले नहीं होने चाहिए। प्रश्नों को 'क्या आप नहीं' से शुरू नहीं करना चाहिए, क्योंकि इनसे पूर्वाग्रह-ग्रस्त उत्तर मिलने की संभावना हो सकती है। उदाहरणार्थः

गलत प्रश्न

क्या आप ऐसा नहीं सोचते कि धूम्रपान को निषिद्ध किया जाना चाहिए।

सही प्रश्न

क्या आप सोचते हैं कि धूम्रपान को निषिद्ध किया जाना चाहिए?

- प्रश्न संकेतक प्रश्न नहीं होने चाहिए, जिससे उत्तरदाता को जवाब देने के लिए सूत्र मिले। उदाहरणार्थः

गलत प्रश्न
क्या आप इस उच्च कोटि की चाय के स्वाद को पसंद करते हैं?
सही प्रश्न
आपको इस चाय का स्वाद कैसा लगा?

- प्रश्न से उत्तर के विकल्प का संकेत नहीं मिलना चाहिए? उदाहरणार्थः

गलत प्रश्न
क्या आप कॉलेज के बाद नौकरी करना चाहेंगी या गृहिणी बनना चाहेंगी?
सही प्रश्न
आप कॉलेज के बाद क्या करना चाहेंगी?

प्रश्नावली में परिमितोत्तर (संरचित) प्रश्न या मुक्तोत्तर (असंरचित) प्रश्न हो सकते हैं। उपरोक्त प्रश्न, कि एक विद्यार्थी कॉलेज के बाद क्या करना चाहता है, एक मुक्तोत्तर प्रश्न है।

संरचित प्रश्न या असंरचित प्रश्न या तो द्विविध प्रश्न हो सकते हैं या फिर बहुविकल्पी प्रश्न हो सकते हैं। जब किसी प्रश्न के उत्तर में 'हाँ' या 'नहीं' के मात्र दो ही विकल्प होते हैं तो इसे द्विविध प्रश्न कहते हैं।

जब प्रश्नावली के अंतर्गत दो से अधिक उत्तरों के विकल्प होते हैं, वहाँ बहुविकल्पी प्रश्न अधिक उपयुक्त होते हैं। उदाहरणार्थ,

प्रश्न - आपने अपनी ज़मीन क्यों बेंच दी?
(क) कर्ज चुकाने के लिए।
(ख) बच्चों की शिक्षा हेतु धन की व्यवस्था के लिए।
(ग) किसी अन्य संपत्ति में निवेश हेतु।
(घ) कोई अन्य कारण (कृपया स्पष्ट करें)।

मुक्तोत्तर प्रश्न विश्लेषण की दृष्टि से उपयोग, स्कोर तथा कोड के लिए आसान होते हैं, क्योंकि उत्तरदाताओं को दिए गए विकल्पों में से उत्तर चुनना होता है। लेकिन इनके उपयुक्त विकल्प लिखने में कठिनाई होती है। इन विकल्पों को स्पष्ट तौर से लिखा जाना चाहिए ताकि मुद्दे के दोनों पहलुओं का प्रतिनिधित्व हो सके। यहाँ पर एक संभावना यह भी रहती है कि व्यक्ति-विशेष का सही उत्तर, दिए गए विकल्पों में से कोई भी न हो। इस के लिए कोई अन्य का विकल्प दिया जाना चाहिए, जहाँ उत्तरदाता अपना वह उत्तर लिख सके, जिसकी अपेक्षा शोधकर्ता/सर्वेक्षक को भी नहीं होती। इसके अलावा, बहु-विकल्पी प्रश्नों की एक अन्य सीमा यह भी है कि इसमें उत्तरदाता को अनेक वैकल्पिक उत्तर देकर प्रतिबंधित कर दिया जाता है, अन्यथा उत्तरदाता इन विकल्पों से भिन्न उत्तर भी दे सकता था।

मुक्तोत्तर प्रश्न के अंतर्गत व्यक्ति को उत्तर देने की अधिक व्यक्तिगत छूट रहती है, लेकिन इनकी सही व्याख्या करने में कठिनाई होती है तथा इन्हें स्कोर करने में मुश्किल होती है, चूँकि उत्तरों में काफी विभिन्नता होती है। उदाहरणार्थ, प्रश्न - वैश्वीकरण के विषय में आपके क्या विचार हो सकते है?

आँकड़ा-संग्रह की विधि

क्या आपने कोई ऐसा टेलीविजन शो देखा है, जिसमें रिपोर्टर ने बच्चों, गृहणियों या आम जनता से क्रमशः उनकी परीक्षा या साबुन के किसी ब्रांड या किसी राजनीतिक पार्टी के बारे में प्रश्न पूछा हो? इन प्रश्नों के पूछने का उद्देश्य आँकड़ा-संग्रह करने के लिए सर्वेक्षण करना है। आँकड़ा-संग्रह की तीन आधारभूत विधियाँ हैंः (क) वैयक्तिक साक्षात्कार (ख) डाक द्वारा सर्वेक्षण (प्रश्नावली भेजना) और (ग) टेलीफोन-साक्षात्कार।

वैयक्तिक साक्षात्कार

यह विधि तभी उपयोग में लाई जाती है जब शोधकर्ता सभी सदस्यों के पास जा सकता हो। इसमें शोधकर्ता (जाँचकर्ता) आमने-सामने होकर उत्तरदाता से साक्षात्कार करता है।

वैयक्तिक साक्षात्कारों को कई कारणों से प्राथमिकता दी जाती है। इसमें सर्वेक्षक एवं उत्तरदाता के बीच व्यक्तिगत संपर्क होता है। सर्वेक्षक या साक्षात्कारकर्त्ता को यह अवसर मिलता है कि वह उत्तरदाता को अध्ययन के उद्‌देश्य के बारे में बता सके तथा उत्तरदाता की किसी भी पूछताछ का जवाब दे सके। इसमें साक्षात्कारकर्त्ता उत्तरदाता से यह निवेदन कर सकता है कि वह विशेष महत्व के बिंदुओं को विस्तार से बताए। इससे अपनिर्वचन (गलत व्याख्या) तथा गलतफहमी से बचा जा सकता है। साथ ही उत्तरदाता की प्रतिक्रियाओं को देख कर कुछ संपूरक सूचनाएँ भी प्राप्त हो सकती हैं।

वैयक्तिक साक्षात्कार की कुछ कमियाँ भी हैं। यह काफी खर्चीली होती है तथा इसमें प्रशिक्षित साक्षात्कार कर्त्ताओं की ज़रूरत होती है। इसमें सर्वेक्षण पूरा करने में काफी अधिक समय लगता है। कभी-कभी शोधकर्ता/सर्वेक्षक की उपस्थिति के कारण उत्तरदाता सही बात नहीं भी बताते हैं।

डाक द्‌वारा प्रश्नावली भेजना

जब सर्वेक्षण में आँकड़ों को डाक द्‌वारा संगृहीत किया जाता है, तो प्रत्येक उत्तरदाता को डाक द्‌वारा प्रश्नावली इस निवेदन के साथ भेजी जाती है कि वह इसे पूरी कर एक निश्चित तारीख तक वापस अवश्य भेज दे। इस का सबसे बड़ा लाभ है कि यह बहुत कम खर्चीली होती है। इसके साथ ही इस विधि के द्‌वारा शोधकर्त्ता/सर्वेक्षक काफी दूर-दराज के क्षेत्रों तक पहुँच सकते हैं, जो संभवतः व्यक्ति या टेलीफोन की पहुँच से भी बाहर हो सकते हैं। इस विधि में साक्षात्कारकर्त्ता उत्तरदाताओं पर प्रभाव भी नहीं डाल पाते। साथ ही, यह उत्तरदाता को पर्याप्त समय देता है ताकि, वह सोच-विचार कर प्रश्नों के उत्तर दे सके। आजकल आन लाइन सर्वेक्षण या **संक्षिप्त संदेश सेवा** (SMS) द्‌वारा सर्वेक्षण काफी लोकप्रिय हो रहे हैं। क्या आप जानते हैं कि ऑन लाइन सर्वेक्षण कैसे आयोजित किए जाते हैं?

डाक द्‌वारा सर्वेक्षण की यह कमी है कि प्रश्नावली के निर्देशों के स्पष्टीकरण के अवसर नहीं मिलते हैं। अतः इसमें प्रश्न की अपनिर्वचन की संभावना रहती है। साथ ही डाक-सर्वेक्षण द्‌वारा कम संख्या में उत्तरदाताओं से उत्तर प्राप्ति की भी संभावना रहती है, क्योंकि प्रश्नावली को बिना पूरा भरे ही लौटाने की या प्रश्नावली को बिल्कुल ही न लौटाने की भी संभावना रहती है और साथ ही डाक विभाग द्‌वारा प्रश्नावली के खो जाने आदि की संभावना भी रहती है।

टेलीफोन साक्षात्कार

टेलीफोन साक्षात्कार के अंतर्गत शोधकर्त्ता/जाँचकर्त्ता टेलीफोन के माध्यम से सर्वेक्षण करता है। टेलीफोन साक्षात्कार का लाभ है कि यह वैयक्तिक साक्षात्कार की अपेक्षा सस्ता होता है और इसे कम समय में ही सम्पन्न किया जा सकता है। यह प्रश्नों को स्पष्ट कर सर्वेक्षक/शोधकर्ता के लिए उत्तरदाता की मदद करने में सहायक होता है। टेलीफोन साक्षात्कार उन मामलों में अधिक बेहतर होता है, जहाँ वैयक्तिक साक्षात्कार के समय उत्तरदाता कुछ खास प्रश्नों के उत्तर देने में झिझक महसूस करता है।

इस विधि की कमी यह है कि इसमें लोगों तक सर्वेक्षक की पहुँच सीमित हो जाती है, क्योंकि बहुत से लोगों के पास निजी टेलीफोन नहीं भी हो सकते हैं। इसके साथ टेलीफोन साक्षात्कार की कमी यह भी है, कि संवेदनशील मुद्दों पर उत्तरदाताओं की उन प्रतिक्रियाओं को दृश्य रूप में नहीं देखा जा सकता है, जो इन विषयों पर सही जानकारी प्राप्त करने में सहायक होती हैं।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- आपको एक ऐसे व्यक्ति से जानकारी (सूचनाएँ) प्राप्त करनी है जो भारत के दूर-दराज के गाँव में रहता है। इस व्यक्ति से सूचना प्राप्त करने के लिए आँकड़ा-संग्रह की कौन सी विधि सर्वाधिक उपयुक्त रहेगी और क्यों? विवेचना कीजिए।
- आपको किसी विद्यालय की अध्ययन गुणवत्ता के बारे में अध्यापक से एक साक्षात्कार करना है। यदि वहाँ पर विद्यालय का प्रधानाचार्य उपस्थित है, तो किस प्रकार की समस्याएँ पैदा हो सकती हैं?

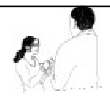
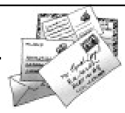
प्रायोगिक सर्वेक्षण

एक बार जब सर्वेक्षण हेतु प्रश्नावली तैयार हो जाए तो यह सलाह दी जाती है कि एक छोटे समूह का सर्वेक्षण करके देख लिया जाना चाहिए, जिसे प्रायोगिक सर्वेक्षण के रूप में या प्रश्नावली की पूर्व-परीक्षा के रूप में जाना जाता है। सर्वेक्षण के बारे में प्रारंभिक अनुमान लगाने में प्रायोगिक सर्वेक्षण सहायक होता है। यह प्रश्नावली के पूर्व-परीक्षण में भी सहायक होता है, ताकि प्रश्नों की कमियों एवं त्रुटियों को पता किया जा सके। इसके साथ ही प्रायोगिक सर्वेक्षण प्रश्नों की उपयुक्तता, निर्देशों की स्पष्टता, सर्वेक्षक (गणनाकार) की कार्य-दक्षता तथा वास्तविक सर्वेक्षण में आनेवाली लागत एवं समय का अनुमान लगाने में भी सहायता करता है।

4. **जनगणना तथा प्रतिदर्श सर्वेक्षण**

जनगणना या पूर्ण गणना (Census or Complete Enumeration)

वह सर्वेक्षण, जिसके अंतर्गत जनसंख्या के सभी तत्व शमिल होते हैं, उसे जनगणना या पूर्ण गणना की विधि कहा जाता है। यदि कुछ खास संस्थाएँ

लाभ	हानि
• उच्चतम उत्तर दर • सभी प्रकार के प्रश्नों के उपयोग की छूट • मुक्तोत्तर प्रश्नों के उपयोग के लिए बेहतर • अस्पष्ट प्रश्नों के लिए स्पष्टीकरण का अवसर 	• बहुत खर्चीला • उत्तरदाता को प्रभावित करने की संभावना • अधिक समय लेने वाला
• कम खर्चीला • ग्रामीण तथा सुदूर क्षेत्रों तक पहुँच का एकमात्र साधन • उत्तरदाता पर कोई प्रभाव नहीं • उत्तरदाता की गोपनीयता सुरक्षित • संवेदनशील मुद्दों के लिए सर्वोत्तम 	• निरक्षरों के द्वारा उपयोग संभव नहीं • उत्तर प्राप्त करने में अधिक समय • अस्पष्ट प्रश्नों के स्पष्टीकरण का अभाव • प्रतिक्रियाएँ देखना सम्भव नहीं
• अपेक्षाकृत कम खर्चीला • उत्तरदाता को प्रभावित करने की अपेक्षाकृत कम संभावना • अपेक्षाकृत उच्च उत्तर दर। 	• सीमित उपयोग • प्रतिक्रियाएँ देखना सम्भव नहीं • उत्तरदाताओं को प्रभावित करने की संभावनाएँ

भारत की संपूर्ण जनसंख्या के बारे में अध्ययन की रुचि रखती हैं, तो उन्हें भारत के सभी शहरों एवं गाँवों के सभी परिवारों के बारे में जानकारी प्राप्त करनी होगी। इस विधि की प्रमुख विशेषता है कि इसके अंतर्गत संपूर्ण जनसंख्या की प्रत्येक व्यष्टिगत इकाई को सम्मिलित करना होता है। आप ऐसा नहीं कर सकते हैं कि कुछ इकाइयों को चुन लें और कुछ को छोड़ दें। आपने संभवतः भारत की जनगणना के बारे में सुना होगा, जो हर दस साल में एक बार होती है। इसके अंतर्गत घर-घर जाकर जानकारी ली जाती है और पूरे भारत के हर एक परिवार को इसमें सम्मिलित किया जाता है। इसके अंतर्गत जन्म एवं मृत्युदर, साक्षरता, रोजगार, आयु संभाविता या प्रत्याशित आयु, जनसंख्या के आकार एवं सरंचना आदि के जनसांख्यिकीय आँकड़े जुटाए जाते हैं, जिन्हें भारत के महानिदेशक द्वारा संगृहीत एवं प्रकाशित किया जाता है। भारत में पिछली जनगणना 2011 में की गई थी।

जनगणना 2001 के अनुसार भारत की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार भारत की जनसंख्या 121.09 करोड़ है, जो 2001 में 102.87 करोड़ थी। 1901 की जनगणना ने देश की जनसंख्या 23.83 करोड़ दर्शाई थी। तब से 110 वर्षों की समयावधि में, देश की जनसंख्या 97 करोड़ से भी अधिक बढ़ गई है। जनसंख्या की औसत वार्षिक वृद्धि दर, जो 1971-81 में 2.2 प्रतिशत प्रतिवर्ष थी, 1991-2001 में घटकर 1.97 प्रतिशत हो गई तथा 2001-2011 में 1.64 हो गई।

जनसंख्या तथा प्रतिदर्श (Population and Sample)

सांख्यिकी में 'समष्टि' शब्द का तात्पर्य है अध्ययन-क्षेत्र के अंतर्गत आने वाली सभी मदों/इकाइयों की समग्रता। अतः समष्टि एक ऐसा समूह है, जिस पर किसी अध्ययन के परिणाम लागू हो सकें। सर्वेक्षण के उद्देश्य के अनुसार किसी समष्टि के अंतर्गत सदैव ऐसी सभी व्यष्टि तथा इकाइयाँ/मदें आती हैं, जिनमें कुछ विशेषताएँ (या विशेषताओं का समूह) हों। प्रतिदर्श चुनने में पहला कार्य समष्टि की पहचान करना है। एक बार जब समष्टि की पहचान हो जाती है तो शोधकर्ता इसका अध्ययन करने का एक तरीका चुनता है। यदि शोधकर्ता को लगता है कि समूची समष्टि या जनसंख्या का सर्वेक्षण संभव नहीं है, तो वह एक प्रतिनिधि प्रतिदर्श चुन सकता है। एक आदर्श प्रतिदर्श (प्रतिनिधि प्रतिदर्श) सामान्यतः समष्टि से छोटा होता है तथा अपेक्षाकृत कम लागत एवं कम समय में समष्टि के बारे में पर्याप्त सही सूचनाएँ प्रदान करने में सक्षम होता है।

मान लें कि आप, किसी क्षेत्र-विशेष के लोगों की औसत आय के बारे में अध्ययन करना चाहते हैं। गणनाविधि के अनुसार, आपको उस क्षेत्र के प्रत्येक व्यक्ति की आय का पता करने के बाद

उनका कुल योग करके वहाँ के लोगों की संख्या से भाग देकर वहाँ के लोगों की औसत आय पता करनी होगी। इस विधि के अंतर्गत बहुत खर्च आएगा, क्योंकि इसके लिए भारी संख्या में परिगणकों की भर्ती करनी होती है। इसके विकल्प के रूप में, आप उस क्षेत्र के, कुछ व्यक्तियों का प्रतिदर्श चुन कर उनकी आय को जान लेते हैं। चुने गए समूह के व्यक्तियों की औसत आय ही उस पूरे क्षेत्र के लोगों की औसत आय होती है। उदाहरण के लिए-

- शोध समस्याः मणिपुर राज्य के चूराचाँदपुर जिले के कृषि श्रमिकों की आर्थिक स्थिति का अध्ययन करना।
- समष्टिः चूराचाँदपुर जिले के समस्त कृषि श्रमिक।
- प्रतिदर्श (नमूना): चूराचाँदपुर जिले के 10 प्रतिशत कृषि श्रमिक।

अधिकतर सर्वेक्षण प्रतिदर्श सर्वेक्षण ही होते हैं। सांख्यिकी में इन्हें कई कारणों से प्राथमिकता दी जाती है। यह प्रतिदर्श कम खर्च में एवं अल्प समय में पर्याप्त विश्वसनीय एवं सही सूचनाएँ उपलब्ध करा सकते हैं। प्रतिदर्श, चूँकि समष्टि से छोटा होता है, अतः सघन पूछताछ के द्वारा अधिक विस्तृत सूचनाएँ संगृहीत की जा सकती हैं। इसके लिए परिगणकों की छोटी टोली की ही जरूरत होगी, जिन्हें आसानी से प्रशिक्षित किया जा सकता है तथा उनके कार्य की निगरानी भली-भाँति की जा सकती है। अब प्रश्न यह उठता है कि इस प्रतिदर्श का चयन कैसे करें? प्रतिदर्श चयन के दो प्रचलित तरीके हैं, जिन्हें यादृच्छिक एवं अयादृच्छिक प्रतिदर्श कहते हैं। इन दोनों प्रकार के प्रतिदर्शों के अंतर का विवरण आगे दिया जा रहा है।

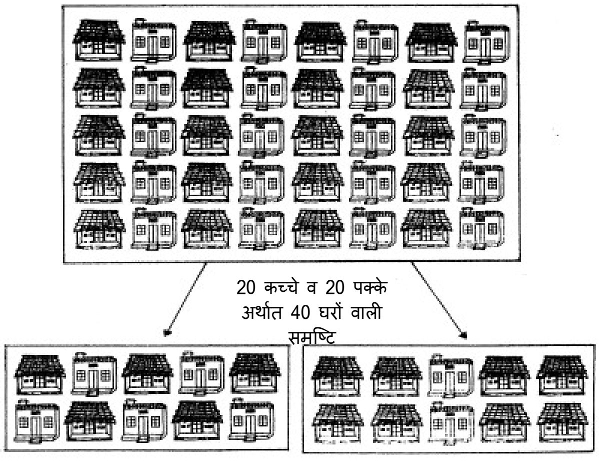
क्रियात्मक गतिविधियाँ

- भारत एवं चीन में अगली जनगणना किन-किन वर्षों में की जाएगी?
- यदि आप XI वीं कक्षा की अर्थशास्त्र की नई पाठ्यपुस्तक के बारे में छात्रों की राय जानना चाहते हैं, तो आप की समष्टि क्या होगी और प्रतिदर्श क्या होगा?
- यदि कोई शोधकर्ता पंजाब में गेहूँ की फसल के औसत उत्पादन का आकलन करना चाहता है, तो उसकी समष्टि और प्रतिदर्श समूह क्या होंगे?

यादृच्छिक प्रतिचयन

जैसा कि नाम से स्पष्ट है, यादृच्छिक प्रतिचयन वह होता है, जहाँ समष्टि प्रतिदर्श-समूह से व्यष्टिगत इकाइयों (प्रतिदर्श) को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। मान लें कि सरकार एक क्षेत्र-विशेष में रहने वाले परिवारों के बजट पर पेट्रोलियम पदार्थों की कीमतों की वृद्धि के प्रभाव की जाँच करना चाहती है। इसके लिए 30 परिवारों का प्रतिनिधिक (यादृच्छिक) प्रतिदर्श प्राप्त करके उसका अध्ययन करना है। इनके चुनाव के लिए पहले उस क्षेत्र के सभी 300 परिवारों के नाम पर्चियों पर लिखे जाते हैं और फिर उन पर्चियों को पूरी तरह आपस में मिला दिया जाता है। इसके बाद, उसमें से साक्षात्कार के लिए बारी-बारी से 30 नाम पर्चियों द्वारा चुन लिए जाते हैं।

यादृच्छिक प्रतिचयन में प्रत्येक व्यक्ति के चुने जाने की समान संभावना होती है और चुना गया



5 पक्के और 5 कच्चे घरों का प्रतिनिधि प्रतिदर्श

2 पक्के और 8 कच्चे घरों का अप्रतिनिधि प्रतिदर्श

व्यक्ति ठीक वैसा ही होता है, जैसा कि नहीं चुना गया व्यक्ति। उपर्युक्त उदाहरण में 300 प्रतिदर्श इकाइयों (प्रतिचयन रचना) की समष्टि में सभी इकाइयों को, 30 इकाइयों के प्रतिदर्श में, चुने जाने का समान अवसर प्राप्त हुआ। अतः इस तरह से निकाले गए प्रतिदर्श को ही यादृच्छिक प्रतिदर्श कहा जाता है। इस विधि को लाटरी विधि के नाम से भी जाना जाता है। आजकल यादृच्छिक प्रतिदर्शों के चयन के लिए कंप्यूटर प्रोग्राम का उपयोग किया जाता है।

निर्गम निर्वाचन (Exit Poll)

आपने देखा ही होगा कि जब चुनाव होते हैं तो टेलीविजन नेटवर्क चुनाव संबंधी समाचार दिखाते हैं। इसके साथ ही ये लोग इसका पूर्वानुमान भी दिखाते हैं कि कौन सी पार्टी जीत सकती है। इसे निर्गम मतदान (ऐग्जिट पोल) के रूप में किया जाता है। इसके अंतर्गत मतदान केंद्रों से मतदान करके निकलने वाले मतदाताओं से यादृच्छिक प्रतिदर्श लेने के लिए पूछा जाता है कि उन्होंने किसे मत दिया है। यहाँ मतदाताओं के प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त आँकड़ों से चुनाव जीतने वालों के बारे में पूर्वानुमान लगाया जाता है। आपने देखा होगा कि निर्गम निर्वाचन सदैव सही अनुमान नहीं लगाते हैं। क्यों?

क्रियात्मक गतिविधि

- आपको भारत में खाद्यान्न उत्पादन की पिछले 50 वर्षों की प्रवृत्ति का विश्लेषण करना है। चूँकि सभी 50 वर्षों के लिए आँकड़े एकत्रित करना मुश्किल है, अतः आपको 10 वर्षों के एक प्रतिदर्श का चयन करना है। आप यादृच्छिक संख्या सारणी का प्रयोग करते हुए अपने प्रतिदर्श कैसे चुनेंगे?

अयादृच्छिक प्रतिचयन

ऐसी स्थिति भी हो सकती है जब आपको किसी क्षेत्र के 100 परिवारों में से 10 को चुनना हो। आपको यह तय करना है कि किन परिवारों को चुनें और किन्हें छोड़ दें। आप ऐसे घरों को चुन सकते हैं, जो आपके लिए सुविधा जनक हों या फिर अपने मित्र या परिचित के घर को चुन सकते हैं। इस मामले में, आप 10 परिवारों को चुनने के लिए अपने निर्णय (पूर्वाग्रह) का प्रयोग करते हैं। ऐसी स्थिति में 100 परिवारों में से आपके द्वारा चुने गए 10 परिवार, अयादृच्छिक प्रतिदर्श द्वारा नहीं चुने गए हैं। अतः किसी अयादृच्छिक प्रतिदर्श में उस समष्टि की सभी इकाइयों के चुने जाने की समान संभावनाएँ नहीं होती हैं और इसमें सर्वेक्षक की सुविधा या निर्णय की भूमिका महत्वपूर्ण हो जाती है। इन्हें चूँकि प्रायः अपने निर्णय, उद्देश्य, सुविधा तथा नियतमात्रा (कोटा) के आधार पर चुना जाता है, अतः इसे अयादृच्छिक प्रतिदर्श के रूप में जाना जाता है।

5. प्रतिचयन एवं अप्रतिचयन त्रुटियाँ

प्रतिचयन त्रुटियाँ (Sampling Errors)

संख्यात्मक मानों वाली जनसंख्या की दो महत्वपूर्ण विशेषताएँ होती हैं जो यहाँ सुसंगत हैं। पहली, केंद्रीय प्रवृत्ति, जिसका मापन औसत (मध्यमान), माध्य या बहुलक के द्वारा किया जा सकता है। दूसरी, विचलन, जिसका मापन 'मानक विचलन', 'माध्य विचलन', परास आदि की गणना द्वारा किया जा सकता है।

प्रतिदर्श का उद्देश्य जनसंख्या प्राचलों के एक या अधिक आकलनों को प्राप्त करना होता है। प्रतिचयन त्रुटि प्रतिदर्श आकलन तथा उसी के जनसंख्या प्राचल (समष्टि विशेष जैसे औसत आय आदि के वास्तविक मूल्य) में अंतर को इंगित करता है।

उदाहरणार्थ-

मणिपुर के 5 कृषकों की आमदनी का उदाहरण लें। मान लें, चर x (कृषकों की आमदनी) के मापन 500, 550, 600, 650, 700 हैं। हमने देखा कि यहाँ समष्टि का औसत $(500 + 550 + 600 + 650 + 700) \div 5 = 3000 \div 5 = 600$ है।

अब मान लीजिए हम दो व्यक्तियों का एक ऐसा प्रतिदर्श चुनते हैं जहाँ x के मूल्य 500 एवं 600 हैं।
अब प्रतिदर्श का औसत (500+600)÷2 = 1100 ÷2 = 550 होता है।

यहाँ आकलन की प्रतिचयन त्रुटि है= 600 (असली मान) -550 (आकलन) = 50

अप्रतिचयन त्रुटियाँ (Non sampling Errors)

अप्रतिचयन त्रुटियाँ प्रतिचयन त्रुटियों की अपेक्षा अधिक गंभीर होती हैं। ऐसा इसलिए होता है कि प्रतिचयन त्रुटियों को बड़े आकार के प्रतिदर्श लेकर कम किया जा सकता है, पर अयादृच्छिक त्रुटियों को कम करना असंभव है, चाहे प्रतिदर्श का आकार बड़ा ही क्यों न रखा जाए। यहाँ तक कि जनगणना में भी अयादृच्छिक त्रुटि की संभावना हो सकती है। अयादृच्छिक त्रुटियों के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैंः

आँकड़ा अर्जन में त्रुटियाँ

इस प्रकार की त्रुटियाँ गलत उत्तरों को रेकार्ड करने से पैदा होती है। मान लीजिए, एक शिक्षक कक्षा के छात्रों से अध्यापक की मेज की लंबाई को मापने के लिए कहता है। छात्रों द्वारा लिए गए माप में अंतर हो सकते हैं। ये अंतर फीते में अंतर, छात्रों की लापरवाही, आदि के कारण हो सकते हैं। इसी प्रकार, मान लें कि हम संतरों की कीमत के बारे में आँकड़े एकत्र करना चाहते हैं। हम जानते हैं कि अलग-अलग दुकानों में तथा अलग-अलग बाजारों में संतरों की कीमत भिन्न-भिन्न हो सकती है। इसके साथ ही गुणवत्ता के आधार पर भी मूल्यों में अंतर हो सकता है। इसीलिए हम यहाँ पर केवल औसत कीमत को ही लेते हैं। रिकार्ड करने में त्रुटियों की संभावना रहती है, जब सर्वेक्षक या उत्तरदाता गलत आँकड़े रेकार्ड करता है या लिखता है। उदाहरण के लिए 31 को गलती से 13 लिखा जा सकता है।

अनुत्तर संबंधी त्रुटियाँ

अनुत्तर संबंधी त्रुटियों की संभावना तब होती है, जब साक्षात्कारकर्त्ता प्रतिदर्श सूची में सूचीबद्ध उत्तरदाता से संपर्क नहीं स्थापित कर पाता है या प्रतिदर्श सूची का कोई व्यक्ति उत्तर देने से मना कर देता है। ऐसे मामलों में प्रतिदर्श प्रेक्षण को प्रतिनिधि प्रतिदर्श नहीं माना जा सकता है।

प्रतिदर्श अभिनति (*Sampling Bias*)

प्रतिदर्श अभिनति (पूर्वाग्रह) की संभावना तब होती है जब प्रतिचयन योजना ऐसी हो कि उसके अंतर्गत समष्टि से कुछ ऐसे सदस्यों के सम्मिलित होने की संभावना नहीं है, जिन्हें प्रतिदर्श में शामिल किया जाना चाहिए था।

6. भारत की जनगणना तथा राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSS)

राष्ट्रीय एवं राज्य दोनों ही स्तरों पर ऐसी संस्थाएँ होती हैं, जो सांख्यिकीय आँकड़ों को संगृहीत, संसाधित तथा सारणीकृत करती हैं। इनमें से राष्ट्रीय स्तर की कुछ प्रमुख संस्थाएँ हैं, सेन्सस ऑफ इंडिया, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSS), केंद्रीय सांख्यिकीय कार्यालय (CSO), भारत का महापंजीकार (RGI), वाणिज्यिक सतर्कता एवं सांख्यिकी महानिदेशालय (DGCIS) तथा श्रम ब्यूरो आदि।

केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन जनसंख्या संबंधित सर्वाधिक पूर्ण एवं सतत जनसांख्यिकीय अभिलेख उपलब्ध कराती है। वर्ष 1881 के बाद से प्रत्येक 10 वर्ष के अंतराल पर नियमित जनगणना की जाती है। देश की आजादी के बाद पहली जनगणना वर्ष 1951 में हुई थी। इन जनगणनाओं के अंतर्गत जनसंख्या के विभिन्न पहलुओं के बारे में सूचनाएँ एकत्र की जाती हैं, जैसे आकार, घनत्व, लिंग-अनुपात, साक्षरता, स्थानांतरण तथा जनसंख्या का

ग्रामीण-शहरी वितरण आदि। जनगणना आँकड़ों का निर्वचन एवं विश्लेषण भारत में अनेक आर्थिक और सामाजिक मुद्दों को समझने के लिए किया जाता है। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन की स्थापना भारत सरकार द्वारा समाज-आर्थिक मुद्दों पर राष्ट्रीय स्तर के सर्वेक्षणों के लिए की गई थी। यह संगठन बारी-बारी से निरंतर सर्वेक्षण करता रहता है। इस संगठन के सर्वेक्षणों द्वारा संग्रह किए गए आँकड़े समय-समय पर विभिन्न रिपोर्टों एवं इसकी त्रैमासिक पत्रिका 'सर्वेक्षण' में प्रकाशित किए जाते हैं। ये आँकड़े मूलतः सामाजिक-आर्थिक मुद्दों पर होते हैं। इसके साथ ही राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन साक्षरता, विद्यालयी नामांकन, शैक्षिक सेवाओं का समुपयोजन, रोजगार, बेरोजगारी, विनिर्माण एवं सेवा क्षेत्रकों के उद्यमों, रुग्णता, मातृत्व, शिशु-देखभाल और सार्वजनिक वितरण प्रणाली के समुपयोजन आदि पर भी अनुमानित आँकड़े उपलब्ध कराता है। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSS) का 60वाँ क्रमिक सर्वेक्षण (जनवरी-जून, 2004) अस्वस्थता तथा स्वास्थ्य सेवाओं पर था। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSS) का 68वाँ क्रमिक सर्वेक्षण (2011-12) उपभोक्ता व्यय पर था। साथ ही राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन उद्योगों का वार्षिक सर्वेक्षण, फसल अनुमान सर्वेक्षण आदि का भी आयोजन करता है। यह उपभोक्ता कीमत सूचकांक से संबंधित संख्याओं के संकलन के लिए ग्रामीण एवं शहरी खुदरा कीमतों का संग्रह आदि भी करता है।

7. सारांश

संख्याओं के रूप में व्यक्त किए गए आर्थिक तथ्य आँकड़े कहलाते हैं। आँकड़ों के संग्रह का उद्देश्य किसी समस्या और उसके कारणों को समझ कर उसकी व्याख्या एवं विश्लेषण करना है। प्राथमिक आँकड़ों का संग्रह सर्वेक्षण आयोजित करके किया जाता है। सर्वेक्षणों के कई चरण होते हैं, जिन्हें सावधानी पूर्वक नियोजित करने की आवश्यकता होती है। ऐसी अनेक संस्थाएँ हैं, जो इन सांख्यिकीय आँकड़ों का संग्रह, संसाधन, सारणीयन, तथा प्रकाशन करती हैं। इनका प्रयोग द्वितीयक आँकड़ों के रूप में किया जा सकता है। आँकड़ों के स्रोत का चुनाव एवं इनके संग्रह की विधा अध्ययन के उद्देश्य पर निर्भर करती है।

पुनरावर्तन

- आँकड़े ऐसे साधन हैं, जो सूचनाएँ उपलब्ध कराकर किसी भी समस्या के विषय में ठोस निष्कर्ष पर पहुँचने में सहायता देती हैं।
- प्राथमिक आँकड़े व्यक्ति द्वारा स्वयं एकत्र की गई सूचनाओं पर निर्भर होते हैं।
- सर्वेक्षण वैयक्तिक साक्षात्कारों, डाक द्वारा प्रश्नावलियाँ भेजकर तथा टेलीफोन साक्षात्कार द्वारा किये जा सकते हैं।
- जनगणना के अंतर्गत समष्टि की सभी इकाइयों/व्यष्टियों को सम्मिलित किया जाता है।
- प्रतिदर्श, समष्टि से चयनित किया गया एक छोटा समूह होता है, जिसके द्वारा संबंधित सूचनाएँ प्राप्त की जा सकती हैं।
- यादृच्छिक प्रतिचयन के अंतर्गत प्रत्येक व्यक्ति को सूचना प्रदान करने हेतु चुने जाने के लिए समान अवसर दिया जाता है।
- प्रतिदर्श त्रुटियाँ वास्तविक समष्टि तथा इनके आकलन के बीच अंतर के कारण पैदा होती हैं।
- अप्रतिचयन त्रुटियाँ आँकड़ों के अर्जन के दौरान पैदा हो सकती हैं, जो उत्तर न देने के कारण, या चयन में पूर्वाग्रह के कारण हो सकती हैं।
- राष्ट्रीय स्तर पर 'भारत की जनगणना' तथा 'राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन' दो महत्वपूर्ण संस्थाएँ हैं, जो विभिन्न महत्वपूर्ण आर्थिक एवं सामाजिक मुद्दों पर आँकड़ों का संग्रहण, संसाधन तथा सारणीयन करती हैं।

अभ्यास

1. निम्नलिखित प्रश्नों के लिए कम से कम चार उपयुक्त बहु विकल्पी वाक्यों की रचना करें:
   (क) जब आप एक नई पोशाक खरीदें तो इनमें से किसे सबसे महत्वपूर्ण मानते है?
   (ख) आप कम्प्यूटर का इस्तेमाल कितनी बार करते हैं?
   (ग) निम्नलिखित में से आप किस समाचार पत्र को नियमित रूप से पढ़ते हैं?
   (घ) पेट्रोल की कीमत में वृद्धि न्यायोचित है?
   (ङ) आपके परिवार की मासिक आमदनी कितनी है?
2. पाँच द्विमार्गी प्रश्नों की रचना करें (हाँ / नहीं के साथ)।
3. सही विकल्प को चिह्नित करें:
   (क) आँकड़ों के अनेक स्रोत होते हैं (सही / गलत)।
   (ख) आँकड़ा-संग्रह के लिए टेलीफोन सर्वेक्षण सर्वाधिक उपयुक्त विधि है, विशेष रूप से जहाँ पर जनता निरक्षर हो और दूर-दराज के काफी बड़े क्षेत्रों में फैली हो (सही / गलत)।
   (ग) सर्वेक्षक/शोधकर्ता द्वारा संग्रह किए गए आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं (सही / गलत)।
   (घ) प्रतिदर्श के अयादृच्छिक चयन में पूर्वाग्रह (अभिनति) की संभावना रहती है (सही / गलत)।
   (ङ) अप्रतिचयन त्रुटियों को बड़ा प्रतिदर्श अपनाकर कम किया जा सकता है (सही / गलत)।

4. निम्नलिखित प्रश्नों के बारे में आप क्या सोचते हैं? क्या आपको इन प्रश्नों में कोई समस्या दीख रही है? यदि हाँ, तो कैसे?

   (क) आप अपने सबसे नजदीक के बाजार से कितनी दूर रहते है?
   (ख) यदि हमारे कूड़े में प्लास्टिक थैलियों की मात्रा 5 प्रतिशत है तो क्या इन्हें निषेधित किया जाना चाहिए?
   (ग) क्या आप पेट्रोल की कीमत में वृंद्ध का विरोध नहीं करेंगे?
   (घ) क्या आप रासायनिक उर्वरक के उपयोग के पक्ष में हैं?
   (ङ) क्या आप अपने खेतों में उर्वरक इस्तेमाल करते हैं?
   (च) आपके खेत में प्रति हेक्टेयर कितनी उपज होती है?

5. आप बच्चों के बीच शाकाहारी आटा नूडल की लोकप्रियता का अनुसंधान करना चाहते हैं। इस उद्देश्य से सूचना-संग्रह करने के लिए एक उपयुक्त प्रश्नावली बनाएँ?

6. 200 फार्म वाले एक गाँव में फसल उत्पादन के स्वरूप पर एक अध्ययन आयोजित किया गया। इनमें से 50 फार्मों का सर्वेक्षण किया गया, जिनमें से 50 प्रतिशत पर केवल गेहूँ उगाए जाते हैं। समष्टि एवं प्रतिदर्श के आकार क्या हैं?

7. प्रतिदर्श, समष्टि तथा चर के दो-दो उदाहरण दें।

8. इनमें से कौन सी विधि द्वारा बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं, और क्यों?
   (क) गणना (जनगणना)(ख) प्रतिदर्श

9. इनमें कौन सी त्रुटि अधिक गंभीर है और क्यों?

   (क) प्रतिचयन त्रुटि (ख) अप्रतिचयन त्रुटि

10. मान लीजिए आपकी कक्षा में 10 छात्र है। इनमें से आपको तीन को चुनने हैं, तो इसमें कितने प्रतिदर्श संभव हैं?

11. अपनी कक्षा के 10 छात्रों में से 3 को चुनने के लिए आप लाटरी विधि का उपयोग कैसे करेंगे? चर्चा करें।

12. क्या लाटरी विधि सदैव एक यादृच्छिक प्रतिदर्श देती है? बताएँ।

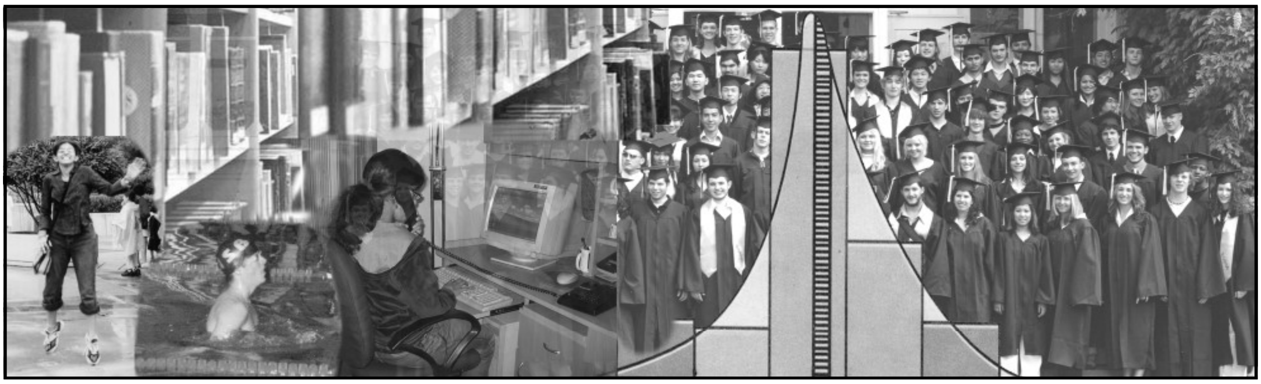
13. यादृच्छिक संख्या सारणी का उपयोग करते हुए, अपनी कक्षा के 10 छात्रों में से 3 छात्रों के चयन के लिए यादृच्छिक प्रतिदर्श की चयन प्रक्रिया की व्याख्या कीजिए।

14. क्या सर्वेक्षणों की अपेक्षा प्रतिदर्श बेहतर परिणाम देते हैं? अपने उत्तर की कारण सहित व्याख्या करें।

11099CH03

अध्याय
3

आँकड़ों का संगठन



इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे कि:
- आगे के सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए आँकड़ों का वर्गीकरण कर सकें;
- मात्रात्मक एवं गुणात्मक वर्गीकरण के बीच अंतर कर सकें;
- बारंबारता वितरण सारणी तैयार कर सकें;
- वर्गों के निर्माण की तकनीक जान सकें;
- मिलान-चिह्न की विधि से परिचित हो सकें;
- एकचर तथा द्विचर बारंबारता वितरण के बीच अंतर कर सकें।

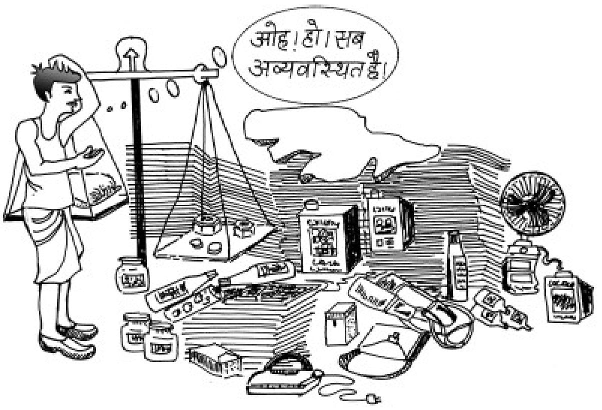
1. प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपने पढ़ा कि आँकड़ों का संग्रहण कैसे करते हैं। साथ ही, आप जनगणना एवं प्रतिचयन के बीच अंतर को भी जान चुके हैं। इस अध्याय में आप यह सीखेंगे कि जो आँकड़े आपने संगृहीत किए थे, उन्हें कैसे वर्गीकृत करते हैं। अपरिष्कृत आँकड़ों को वर्गीकृत करने का उद्देश्य उन्हें व्यवस्थित करना है, ताकि उन्हें आसानी से आगे के सांख्यिकीय विश्लेषण के योग्य बनाया जा सके।

क्या आपने कभी स्थानीय कबाड़ी वाले या रद्दी सामान खरीदने वाले को देखा है, जिसे आप अपना पुराना अखबार, टूटे-फूटे घरेलू सामान, खाली-काँच की बोतलें, प्लास्टिक आदि बेचते हैं। वह आपसे इन चीजों को खरीदता है और उन लोगों को बेच देता है जो इनका पुनः चक्रण करते हैं। लेकिन अपनी दुकान में अधिक कबाड़ के इकट्ठे होने से उसे अपना व्यापार चलाने में मुश्किल हो सकती है, अगर वह इन्हें उचित ढंग से व्यवस्थित न करे। वह इस स्थिति को सरल बनाने के लिए विभिन्न कबाड़ों को उपयुक्त समूह में रखता है, अर्थात् उन्हें वर्गीकृत करता है। वह पुराने अखबारों को एक साथ रस्सी से बाँध कर रखता है। इसके बाद सभी

खाली काँच की बोतलों को एक बोरे में रखता है। वह धातु के सामानों का एक ढेर अपनी दुकान के एक कोने में लगाता है और फिर उनको 'लोहा', 'पीतल', 'ताँबा', 'एल्यूमिनियम' आदि वर्गों में छाँट कर रखता है। इस प्रकार से वह अपने कबाड़ को भिन्न वर्गों - 'अखबार', 'प्लास्टिक', 'काँच', 'धातु' आदि में विभाजित कर उन्हें व्यवस्थित करता है। जब एक बार उसका सारा कबाड़ व्यवस्थित एवं वर्गीकृत हो जाता है, तब खरीददार की माँग पर, उसे सामग्री विशेष को खोजकर देने में आसानी हो जाती है।

ठीक इसी प्रकार से, जब आप अपने विद्यालय की पुस्तकों को एक विशेष क्रम में रखते हैं, तो उनको संभालना आसान हो जाता है। आप उन्हें विषयों के अनुसार वर्गीकृत कर सकते हैं, जहाँ



प्रत्येक विषय एक समूह या वर्ग बन जाता है। उदाहरणार्थ, जब आपको इतिहास की कोई विशेष पुस्तक की आवश्यकता पड़ती है तो आप को केवल यह करना है कि 'इतिहास' समूह में उस पुस्तक को खोजें। अन्यथा आप को अपनी यह विशेष पुस्तक सारी पुस्तकों के ढेर में खोजनी पड़ेगी।

यद्यपि पदार्थों अथवा वस्तुओं का वर्गीकरण बहुमूल्य श्रम और समय को बचाता है, इसे मनमाने तरीके से नहीं किया जाता है। कबाड़ी वाले ने अपने कबाड़ को इस तरह से समूहों में रखा कि प्रत्येक समूह में एक ही प्रकार की चीजें हों। उदाहरण के लिए, उसने 'काँच' के समूह में खाली काँच की बोतलें, टूटे खिड़की के काँच तथा टूटे दर्पण आदि रखे। ठीक इसी तरह से जब आपने अपनी इतिहास की पुस्तक को 'इतिहास' समूह में वर्गीकृत किया, तो आप उसमें अन्य विषयों की पुस्तकें नहीं रखेंगे। अन्यथा समूह-गठन का पूरा उद्देश्य ही निरर्थक हो जाएगा। इसलिए, वर्गीकरण का तात्पर्य एक वस्तुओं को समूह या वर्गों में किसी खास आधार पर वर्गीकृत या व्यवस्थित करने से है।

क्रियात्मक गतिविधि

- अपने स्थानीय डाकघर जायें और देखें कि पत्रों कि छँटाई कैसे की जाती है। क्या आप जानते हैं कि पत्र में पिन कोड का क्या अर्थ है। अपने डाकिए से पूछें।

2. अपरिष्कृत आँकड़े

कबाड़ीवाले के कबाड़ की भाँति, अवर्गीकृत आँकड़े अथवा अपरिष्कृत आँकड़े भी अत्यधिक अव्यवस्थित होते हैं। ये प्रायः अति विशाल होते हैं, जिन्हें संभालना कठिन होता है। इनसे सार्थक निष्कर्ष निकालना श्रमसाध्य कार्य है, क्योंकि सांख्यिकीय विधियों का इन पर सरलता से प्रयोग नहीं किया जा सकता। इसलिए इस प्रकार के आँकड़ों का उचित संगठन तथा प्रस्तुतीकरण आवश्यक होता है, ताकि व्यवस्थित रूप से साँख्यिकीय विश्लेषण किया जा सके। अतः आँकड़ों के संग्रह के पश्चात् अगला चरण उन्हें संगठित कर वर्गीकृत रूप में प्रस्तुत करना है।

मान लीजिए, कि आप गणित में छात्रों की प्रगति जानना चाहते हैं और आपने अपने स्कूल के 100 छात्रों के गणित के अंकों के आँकड़े एकत्रित कर लिये हैं। अगर आप इन्हें एक सारणी में प्रस्तुत करते हैं तो वे संभवतः सारणी 3.1 जैसे प्रतीत हो सकते हैं।

सारणी 3.1

किसी परीक्षा में 100 छात्रों द्वारा गणित में प्राप्त अंक

47	45	10	60	51	56	66	100	49	40
60	59	56	55	62	48	59	55	51	41
42	69	64	66	50	59	57	65	62	50
64	30	37	75	17	56	20	14	55	90
62	51	55	14	25	34	90	49	56	54
70	47	49	82	40	82	60	85	65	66
49	44	64	69	70	48	12	28	55	65
49	40	25	41	71	80	0	56	14	22
66	53	46	70	43	61	59	12	30	35
45	44	57	76	82	39	32	14	90	25

या फिर आप अपने पड़ोस के 50 परिवारों से, भोजन पर उनके मासिक व्यय के आँकड़ों का संग्रह यह जानने के लिए करते हैं कि भोजन पर उनका औसत व्यय कितना है। इस मामले में संगृहीत आँकड़ों को जब आप सारणी में प्रस्तुत करते हैं, तो वे सारणी 3.2 की तरह दिख सकते हैं। सारणी 3.1 तथा सारणी 3.2, दोनों ही आँकड़े अपरिष्कृत अथवा अवर्गीकृत हैं। दोनों ही सारणियों में संख्याओं को किसी भी क्रम में व्यवस्थित नहीं किया गया है। अब अगर आपसे यह पूछा जाए कि सारणी 3.1 में गणित में सर्वोच्च अंक कितने हैं, तब आपको 100 छात्रों के अंकों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना होगा। यह एक बेहद थका देने वाला काम है। यदि आपको 100 छात्रों के स्थान पर 1000 छात्रों के अंक संभालने हों तो यह और भी अधिक थकानेवाला होगा।

सारणी 3.2

खाद्य पर 50 परिवारों के मासिक पारिवारिक व्यय (रु में)

1904	1559	3473	1735	2760
2041	1612	1753	1855	4439
5090	1085	1823	2346	1523
1211	1360	1110	2152	1183
1218	1315	1105	2628	2712
4248	1812	1264	1183	1171
1007	1180	1953	1137	2048
2025	1583	1324	2621	3676
1397	1832	1962	2177	2575
1293	1365	1146	3222	1396

ठीक इसी प्रकार से, सारणी 3.2 में आपके लिए काफी मुश्किल होगा कि 50 परिवारों के खाने पर मासिक व्यय के औसत को पता कर सकें। यही कठिनाई तब कई गुना बढ़ जाएगी यदि यह संख्या बहुत बड़ी हो, जैसे 5000 परिवार। ठीक कबाड़ीवाले की भाँति ही (जब कबाड़ का ढेर बहुत बड़ा और अव्यवस्थित हो तो उसे एक विशेष वस्तु को ढूँढ़ने में बहुत कठिनाई होती है) आपकी भी स्थिति होगी, यदि अपरिष्कृत आँकड़ों का भंडार बहुत बड़ा हो और आप उससे कोई सूचना प्राप्त करना चाहें। इसलिए, संक्षेप में अवर्गीकृत विशाल आँकड़ों से कोई सूचना प्राप्त करना एक बेहद थका देने वाला एवं उबाऊ काम है।

वर्गीकरण के द्वारा अपरिष्कृत आँकड़ों को संक्षिप्त एवं बोधगम्य बनाया जाता है। जब एक प्रकार की विशेषताओं वाले तथ्यों को एक ही वर्ग में रखा जाता है तो वे बिना किसी कठिनाई के ढूँढ़ने, तुलना करने तथा निष्कर्ष निकालने योग्य हो जाते हैं। आपने अध्याय 2 में पढ़ा है कि प्रति दस साल बाद भारत सरकार जनसंख्या की गणना कराती है। सन् 2001 की जनगणना में लगभग 20 करोड़ लोगों से संपर्क किया गया। जनगणना के अपरिष्कृत आँकड़े बहुत विशाल एवं विखंडित

होते हैं। उन से कोई भी अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालना असंभव कार्य लगता है। लेकिन जनगणना के यही आँकड़े जब लिंग, शिक्षा, वैवाहिक स्थिति, पेशे आदि के अनुसार वर्गीकृत किये जाते हैं तब भारत की जनसंख्या की प्रकृति एवं संरचना आसानी से समझ में आ जाती है।

अपरिष्कृत आँकड़े चरों के प्रेक्षणों से बने होते हैं। सारणी 3.1 तथा 3.2 में दिए गए अपरिष्कृत आँकड़े विशेष या चर समूह पर किए गए प्रेक्षणों को प्रदर्शित करते हैं। उदाहरण के लिए सारणी 3.1 को देखें जिसमें 100 छात्रों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंकों को दर्शाया गया है। इन अंकों से हम कैसे अर्थ निकाल सकते हैं? गणित के शिक्षक इन अंकों को देखकर सोच रहे होंगे - मेरे छात्रों ने कैसा किया? कितने असफल रहे? आँकड़ों का वर्गीकरण हमारे उद्देश्यों पर निर्भर करता है इस स्थिति में, शिक्षक गहनतापूर्वक समझने की कोशिश करेंगे - छात्रों ने कैसा किया? संभवतया वह बारंबारता वितरण बनाने का चयन करे। इस पर अगले भाग में विवेचना की जायेगी।

क्रियात्मक गतिविधि

- आप अपने परिवार के एक वर्ष के साप्ताहिक व्यय के आँकड़े संगृहीत कीजिए और उसे एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए। देखिए कि उसमें कितने प्रेक्षण हैं। आँकड़ों को मासिक आधार पर व्यवस्थित कीजिए और देखिए कि अब कितने प्रेक्षण हैं।

3. **आँकड़ों का वर्गीकरण**

किसी वर्गीकरण के वर्ग या समूह कई तरीकों से बनाए जा सकते हैं। आप अपनी पुस्तकों को विषयों-'इतिहास', 'भूगोल', 'गणित', 'विज्ञान' आदि में वर्गीकृत करने के स्थान पर इन्हें वर्णमाला के क्रम में लेखकों के आधार पर वर्गीकृत कर सकते हैं। अथवा, आप इन्हें प्रकाशन- वर्ष के आधार पर भी वर्गीकृत कर सकते हैं। आप उन्हें किस प्रकार से वर्गीकृत करना चाहते हैं, यह आपकी आवश्यकता पर निर्भर करेगा।

ठीक इसी प्रकार से, अपरिष्कृत आँकड़ों को भी विभिन्न तरीकों से वर्गीकृत किया जा सकता है जो आपके अध्ययन के उद्देश्य पर निर्भर करता है। उन्हें समय के अनुसार समूहित किया जा सकता है। इस प्रकार के वर्गीकरण को **कालानुक्रमिक वर्गीकरण** कहते हैं। इस प्रकार के वर्गीकरण में, आँकड़ों को समय के संदर्भ-जैसे वर्ष, तिमाही, मासिक या साप्ताहिक आदि के रूप में, आरोही या अवरोही क्रम में वर्गीकृत किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण वर्षों के आधार पर भारत की जनसंख्या के वर्गीकरण को दिखाता है। चर 'जनसंख्या' एक **काल-श्रेणी** है, क्योंकि इसमें विभिन्न वर्षों के मानों की एक श्रेणी चित्रित की गई है।

उदाहरण 1

भारत की जनसंख्या (करोड़ में)

वर्ष	जनसंख्या (करोड़ में)
1951	35.7
1961	43.8
1971	54.6
1981	68.4
1991	81.8
2001	102.7
2011	121.0

स्थानिक वर्गीकरण के अंतर्गत आँकड़ों का वर्गीकरण भौगोलिक स्थितियों जैसे कि देश, राज्य, शहर, जिला, कस्बा आदि के संदर्भानुसार होता है। उदाहरण 2 में विभिन्न देशों में गेहूँ की उपज दिखाई गई है।

उदाहरण 2

विभिन्न देशों में गेहूँ की उपज (2013)

देश	गेहूँ की उपज (किग्रा/एकड़)
कनाडा	3594
चीन	5055
फ्रांस	7254
जर्मनी	7998
भारत	3154
पाकिस्तान	2787

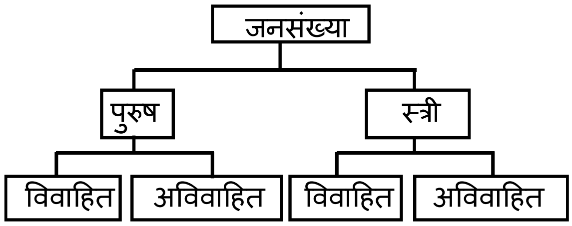
स्रोतः कृषि आँकड़े, भारत सरकार, 2015

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- उदाहरण 1 में, उस वर्ष को बताएँ जिसमें भारत की जनसंख्या न्यूनतम और अधिकतम है।
- उदाहरण 2 में, उस देश का पता लगाइये, जिसकी गेहूँ की उपज भारत से थोड़ी अधिक है। येह प्रतिशत में कितनी होगी?
- उदाहरण दो में दिए गए देशों को गेहूँ की उपज के आरोही क्रम में रखिये। ठीक यही अभ्यास उपज को अवरोही क्रम में रखते हुए कीजिए।

कई बार आपका सामना ऐसी विशेषताओं से होता है, जिन्हें मात्रात्मक रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। इस प्रकार की विशेषताओं को 'गुण' कहते हैं। उदाहरण के लिए-राष्ट्रीयता, साक्षरता, धर्म, लिंग, वैवाहिक स्थिति आदि। इन्हें मापा नहीं जा सकता है। इन गुणों को गुणात्मक विशेषता की उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर वर्गीकृत कर सकते हैं। विशेषताओं पर आधारित आँकड़ों के ऐसे वर्गीकरण को गुणात्मक वर्गीकरण कहा जाता है। निम्नलिखित उदाहरण में हम किसी देश की जनसंख्या को गुणात्मक चर 'लिंग' के आधार पर समूहित किया हुआ पाते हैं। इसमें प्रेक्षण स्त्री या पुरुष हो सकता है। इन दो विशेषताओं को आगे वैवाहिक स्थिति के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है, जैसा कि नीचे दिया गया है

उदाहरण 3



प्रथम चरण में यह वर्गीकरण पहले विशेषता की उपस्थिति या अनुपस्थिति पर आधारित है जैसे कि 'पुरुष' या 'पुरुष नहीं' (स्त्री) है। दूसरे चरण में, प्रत्येक वर्ग 'स्त्री' या 'पुरुष' आगे दूसरी विशेषता की उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर विभाजित है, जैसे विवाहित या अविवाहित। ऊँचाई, भार, आयु, आय, छात्रों के अंक आदि विशेषताओं की प्रकृति मात्रात्मक है। जब ऐसी विशिष्टताओं के संगृहीत आँकड़ों को वर्गों में समूहित किया जाता है तो यह वर्गीकरण मात्रात्मक वर्गीकरण कहलाता है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- आस-पास की वस्तुओं को सजीव या निर्जीव के रूप में समूहित किया जा सकता है। क्या यह मात्रात्मक वर्गीकरण है?

उदाहरण 4

100 छात्रों के गणित के प्राप्तांकों का बारंबारता वितरण

अंक	बारंबारता
0-10	1
10-20	8
20-30	6
30-40	7
40-50	21
50-60	23
60-70	19
70-80	6
80-90	5
90-100	4
योग	100

उदाहरण 4 में 100 छात्रों के गणित के प्राप्तांकों का मात्रात्मक वर्गीकरण दिखाया गया है, जिन्हें सारणी 3.1 में बारंबारता वितरण के रूप में दिया गया है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- उदाहरण 4 की बारंबारता के मानों को कुल बारंबारता के अनुपात में या प्रतिशत में प्रकट कीजिए। ध्यान रहे कि इस प्रकार से प्रकट की गई बारंबारता को सापेक्षिक बारंबारता के रूप में जाना जाता है।
- उदाहरण 4 में किस वर्ग के अंतर्गत आँकड़ों का अधिकतम संकेंद्रण है? इसे कुल प्रेक्षणों के प्रतिशत के रूप में प्रकट कीजिए। किस वर्ग में आँकड़ों का न्यूनतम संकेंद्रण है?

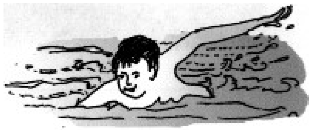
4. **चर : संतत और विविक्त**

चर की सरल परिभाषा, जिसका आपने पिछले अध्याय में अध्ययन किया था, यह नहीं बतलाती कि यह कैसे परिवर्तित होता है। चरों में अंतर विशेष वर्गीकरण के आधार पर होता है इन्हें सामान्यतः दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता हैः

(क) संतत तथा
(ख) विविक्त

संतत चर का कोई भी संख्यात्मक मान हो सकता है। यह पूर्णांक मान (1, 2, 3, 4 ...), भिन्नात्मक मान (1/2, 2/3, 3/4), तथा वे मान जो यथातथ भिन्न नहीं हैं ($\sqrt{2}$ = 1.414, $\sqrt{3}$ = 1.732, ..., $\sqrt{7}$ = 2.645) हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, मान लिजिए कि एक छात्र का कद 90-150 सेमी तक बढ़ता है, तो उसके कद के मान इसके बीच आने वाले सभी मान हो सकते हैं। यह संपूर्ण संख्या वाले मान को भी प्रकट कर सकता है, जैसे कि 90 सेमी, 100 सेमी, 108 सेमी, 150 सेमी। इसके साथ ही यह भिन्नात्मक मान जैसे 90.85 सेमी, 102.34 सेमी, 149.99 सेमी आदि भी हो सकते हैं, जो पूर्णांक नहीं हैं। इस प्रकार 'ऊँचाई' चर किसी भी कल्पित मान को अभिव्यक्त करने में सक्षम है और इसके मानों को अनन्त श्रेणियों में बाँटा जा सकता है। संतत चर के अन्य उदाहरण भार, समय तथा दूरी आदि हैं।

संतत चर के विपरीत विविक्त चर केवल निश्चित मान हो सकते हैं। इसके मान केवल परिमित 'उछाल' से बदलते हैं। यह उछाल एक मान से दूसरे मान के बीच होते हैं, परंतु इसके बीच में कोई मान नहीं आता है। उदाहरण के लिए, कोई चर जैसे 'किसी कक्षा में छात्रों की संख्या', भिन्न वर्गों के लिए उन मानों की कल्पना करता है, जिसमें केवल पूर्ण संख्याएँ हों। यह कोई भी भिन्नात्मक मान जैसे 0.5 नहीं हो सकता, क्योंकि 'एक छात्र का आधा' निरर्थक है। इस प्रकार से इसमें 25 एवं 26 के बीच का मान 25.5 नहीं हो सकता है। इसकी अपेक्षा इसका मान या तो 25 होगा या फिर 26। हम देखते हैं कि जब इसका मान 25 से 26 में बदलता है, तो इन दोनों के बीच के भिन्नों को इसमें नहीं लिया जाता है। लेकिन ऐसा नहीं सोचना चाहिए कि किसी विविक्त चर का मान भिन्न में नहीं हो सकता। मान लीजिए कि x एक चर है जिसमें 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 ..., जैसे मान हैं तो क्या यह एक विविक्त चर है? हाँ, क्योंकि यद्यपि x के मान भिन्नों में हो सकते हैं, तथापि ये



दो सन्निकट भिन्नों के बीच नहीं हो सकते। यह 1/8 से 1/16 में और फिर 1/16 से 1/32 में 'बदलता' है, परंतु 1/8 से 1/16 के बीच या 1/16 से 1/32 के बीच के मान नहीं ले सकता।

क्रियात्मक गतिविधि

- निम्नलिखित चरों का संतत तथा विविक्त में वर्गीकरण करें:
  क्षेत्रफल, आयतन, ताप, पाँसे पर आने वाली संख्या, फसल-उपज, जनसंख्या, वर्षा, सड़क पर कारों की संख्या और आयु।

हमने पहले यह बताया है कि उदाहरण 4 में 100 छात्रों के गणित में प्राप्तांक का बारंबारता वितरण दिया गया है, जैसा कि सारणी 3.1 में दिखाया गया है। यह दिखाता है कि 100 छात्रों के अंकों को वर्गों में कैसे समूहित किया गया है। आपको आश्चर्य होगा कि हमने सारणी 3.1 के अपरिष्कृत आँकड़ों से इसे कैसे प्राप्त किया। लेकिन इस प्रश्न का समाधान प्रस्तुत करने से पहले आपका यह जानना आवश्यक है कि बारंबारता वितरण क्या होता है।

5. बारंबारता वितरण क्या है?

बारंबारता वितरण अपरिष्कृत आँकड़ों को एक मात्रात्मक चर में वर्गीकृत करने का एक सामान्य तरीका है। यह दिखाता है कि किसी चर के भिन्न मान (यहाँ छात्र द्वारा गणित में प्राप्तांक) विभिन्न वर्गों में, अपने अनुरूप वर्गों की बारंबारताओं के साथ कैसे वितरित किए जाते हैं। इस उदाहरण में हमारे पास प्राप्तांकों के 10 वर्ग हैं। 0-10, 10-20, ... 90-100। वर्ग-बारंबारता पद का अर्थ है एक विशेष वर्ग में मानों की संख्या। उदाहरण के लिए वर्ग 30-40 में सारणी 3.1 में प्राप्तांकों के 7 मान हैं। ये 30, 37, 34, 30, 35, 39, 32 हैं। इस प्रकार से वर्ग 30-40 की बारंबारता 7 हुई। पर शायद आपको आश्चर्य हो कि 40 का अंक जो अपरिष्कृत आँकड़ों में दो बार आया है, उसे 30-40 वर्ग में शामिल क्यों नहीं किया गया? अगर इसे 30-40 वर्ग की बारंबारता में शामिल किया जाता, तो ये 7 की अपेक्षा 9 होते। यह पहेली तब स्पष्ट हो जाएगी, जब आप इस अध्याय को पर्याप्त धैर्य के साथ सावधानी पूर्वक पढ़ेंगे। इसलिए पढ़ना जारी रखें। आपको स्वयं ही इसका उत्तर प्राप्त हो जाएगा।

बारंबारता वितरण सारणी में प्रत्येक वर्ग, वर्ग सीमाओं द्वारा घिरा होता है। वर्ग में ये सीमाएँ दो छोरों पर होती हैं। इसमें न्यूनतम मान को निम्नवर्ग सीमा तथा उच्चतम मान को उच्च वर्ग सीमा कहते हैं। उदाहरण के लिए वर्ग 60-70 में वर्ग सीमाएँ 60 एवं 70 हैं। इसकी निम्न वर्ग सीमा 60 और उच्च वर्ग सीमा 70 है। वर्ग मध्यांतर या अंतराल या वर्ग विस्तार उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा के बीच का अंतर है। वर्ग 60-70 के लिए वर्ग अंतराल 10 है, (उच्च वर्ग सीमा में से निम्न वर्ग सीमा को घटाकर)।

वर्ग मध्यबिन्दु अथवा वर्ग चिह्न किसी वर्ग का मध्य-मान है। यह वर्ग की निम्न वर्ग सीमा तथा उच्च वर्ग सीमा के बीच होता है। इसे निम्नलिखित तरीके से पता किया जा सकता है:

वर्ग मध्य बिन्दु या वर्ग चिह्न = (उच्च वर्ग सीमा + निम्न वर्ग सीमा)/2 ... ... (1)

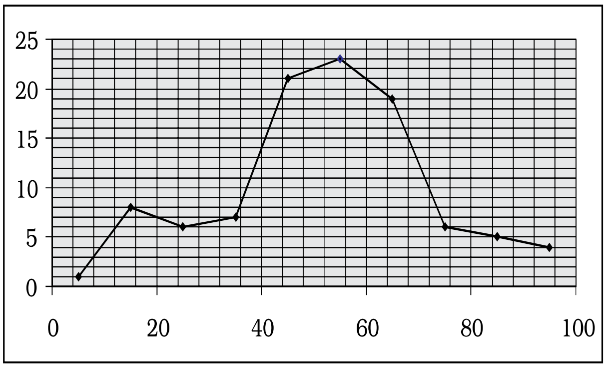
प्रत्येक वर्ग का वर्ग चिह्न या वर्ग मध्य-बिन्दु एक वर्ग के प्रतिनिधित्व के लिए प्रयुक्त किया जाता है। एक बार जब अपरिष्कृत आँकड़ों को वर्गों में समूहित कर दिया जाता है, तब आगे की गणनाओं में व्यष्टि प्रेक्षणों का प्रयोग नहीं किए जाता है बल्कि इसकी जगह वर्ग चिह्न प्रयुक्त किया जाता है।

सारणी 3.3

निम्न वर्ग सीमा, उच्च वर्ग सीमा तथा वर्ग चिह्न

वर्ग	बारंबारता	निम्नवर्ग सीमा	उच्चवर्ग सीमा	वर्ग चिह्न
0-10	1	0	10	5
10-20	8	10	20	15
20-30	6	20	30	25
30-40	7	30	40	35
40-50	21	40	50	45
50-60	23	50	60	55
60-70	19	60	70	65
70-80	6	70	80	75
80-90	5	80	90	85
90-100	4	90	100	95

बारंबारता वक्र किसी बारंबारता वितरण का आलेखीय प्रस्तुतीकरण है। चित्र 3.1 के अंतर्गत उपरोक्त उदाहरण में दिए गए आँकड़ों का आरेखी प्रस्तुतीकरण दिया गया है। बारंबारता वक्र प्राप्त करने के लिए, हम वर्ग चिह्न को एक्स (x) अक्ष पर तथा बारंबारता को वाई (y) अक्ष पर आलेखित करते हैं।



चित्र 3.1 आँकड़ों के बारंबारता वितरण का आरेखी प्रस्तुतीकरण।

बारंबारता वितरण कैसे तैयार करें?

बारंबारता वितरण तैयार करते समय हमें निम्न पाँच प्रश्नों की व्याख्या पर ध्यान देने की आवश्यकता हैः

1. वर्ग अंतराल समान आकार के हों या असमान आकार के?
2. हमें कितने वर्ग रखने चाहिए?
3. प्रत्येक वर्ग का आकार क्या हो?
4. वर्ग सीमाओं का निर्धारण कैसे किया जाय?
5. प्रत्येक वर्ग के लिए बारंबारता कैसे प्राप्त की जाय?

वर्ग अंतराल, समान अंतराल के हों या असमान अंतराल के?

दो परिस्थितियों में असमान आकार के वर्ग अंतरालों का प्रयोग किया जाता है। पहली, जब हमारे पास आय तथा ऐसे ही चरों के आँकड़े हों, जहाँ परास काफी अधिक होता है। उदाहरण के लिए, दैनिक आय लगभग शून्य से लेकर कई सौ करोड़ रुपये तक हो सकती है। ऐसी स्थिति में, समान वर्ग अंतराल उपयुक्त नहीं है, क्योंकि (i) यदि वर्ग अंतराल छोटे तथा समान आकार के होंगे, तो वर्गों की संख्या बहुत अधिक हो जाएगी। (ii) यदि वर्ग अंतराल अधिक है, तो आय के बहुत कम या बहुत अधिक स्तरों पर जानकारी छिपी हुई रह जाएगी।

दूसरी, यदि मानों की एक बहुत बड़ी संख्या परास के एक छोटे से भाग में केंद्रित होती है, तो समान वर्ग अंतराल से कई मानों की सूचना प्राप्त नहीं हो पाएगी।

अन्य सभी स्थितियों में, आवृत्ति-वितरण में समान आकार के वर्ग अंतरालों का प्रयोग होता है।

वर्गों की संख्या कितनी होनी चाहिए?

वर्गों की संख्या सामान्यतः 6 तथा 15 के बीच होती है। यदि हमारे वर्ग अंतराल समान आकार के हों, तो वर्गों की संख्या, परास (चर के अधिकतम तथा न्यूनतम मान में अंतर) को वर्ग अंतराल से भाग देने पर प्राप्त की जा सकती है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

निम्नलिखित का परास ज्ञात करें:
- उदाहरण 1 में भारत की जनसंख्या।
- उदाहरण 2 में गेहूँ की उपज।

प्रत्येक वर्ग का आकार क्या होना चाहिए?

इस प्रश्न का उत्तर पहले के प्रश्न के उत्तर पर निर्भर करता है। समीकरण (2) प्रकट करती है कि एक बार वर्ग अंतराल को तय करने पर चर के दिए गए परास से हम वर्गों की संख्या निर्धारित कर सकते हैं। ठीक इसी प्रकार से हम वर्ग अंतराल निर्धारित कर सकते हैं, जब एक बार हम वर्गों की संख्या तय कर लेते हैं। इस तरह हम पाते हैं कि ये दोनों निर्णय एक दूसरे से जुड़े हुए हैं। पहले का निर्णय लिए बिना हम दूसरे पर निर्णय नहीं ले सकते।

उदाहरण 4 में, हमारे पास वर्गों की संख्या 10 है तथा परास का दिया गया मान 100 है, तब वर्ग-अंतराल स्वतः ही (समानता 2 के द्वारा) 10 है। ध्यान दें कि वर्तमान संदर्भ में हमने वह वर्ग अंतराल चुना है, जिनका परिमाण समान है। तथापि हम ऐसा वर्ग अंतराल चुन सकते हैं जिसका परिमाण समान न हो, तब ऐसे मामले में वर्गों की चौड़ाई असमान होगी।

हमें वर्ग सीमाएँ कैसे निर्धारित करनी चाहिए?

वर्ग सीमाएँ निश्चित तथा स्पष्ट रूप से होनी चाहिए। सामान्यतः मुक्तोत्तर वर्ग, जैसे- '70 तथा अधिक' या '10 से कम' वांछनीय नहीं होते। निम्न तथा उच्च वर्ग सीमाओं का निर्धारण इस प्रकार से किया जाना चाहिए कि प्रत्येक वर्ग की आवृत्तियों की प्रवृत्ति वर्ग अंतराल के मध्य में संकेंद्रण की हो। वर्ग अंतराल दो प्रकार के होते हैं-

1. समावेशी वर्ग अंतरालः इस स्थिति में, वर्ग की निम्न तथा उच्च सीमाओं के मूल्य वाले मानों को उस वर्ग की आवृत्ति में शामिल किया जाता है।
2. अपवर्जी वर्ग अंतरालः इस स्थिति में, वर्ग की निम्न तथा उच्च सीमाओं के मूल्य वाली मदों को उस वर्ग की आवृत्ति में शामिल नहीं किया जाता।

असतत चरों की स्थिति में, अपवर्जी तथा समावेशी, दोनों प्रकार के वर्ग अंतरालों का प्रयोग किया जा सकता है।

सतत चरों की स्थिति में, समावेशी वर्ग अंतरालों का प्रयोग बहुधा किया जाता है।

उदाहरण

मान लीजिए, हमारे पास एक परीक्षा में विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों के आँकड़े हैं तथा सभी प्राप्तांक पूर्णांक हैं (भिन्नात्मक अंकों की अनुमति नहीं है)। मान लीजिए, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक 0 से 100 के बीच हैं।

यह असतत चरों की स्थिति है, क्योंकि भिन्नात्मक अंकों की अनुमति नहीं है। इस स्थिति में, यदि हम समान आकार वाले वर्ग अंतरालों का उपयोग करते हैं तथा 10 वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हैं, तो वर्ग अंतरालों के निम्न रूप हो सकते हैं-

वर्ग अंतराल का समावेशी रूप
0-10
11-20
21-30
-
-
91-100

वर्ग अंतराल का अपवर्जी रूप
0-10
10-20
20-30
-
-
90-100

अपवर्जी वर्ग अंतराल की स्थिति में, हमें यह अग्रिम रूप से निर्धारित करना होता है कि वर्ग सीमा के मान के बराबर किसी चर का मान होने पर क्या करना है। उदाहरण के लिए, हम यह निर्णय कर सकते हैं कि 10, 30 आदि मानों को क्रमशः

वर्ग अंतराल "0 से 10" तथा "20 से 30" में रखा जाए। इस स्थिति में वर्ग की निचली सीमा को वर्ग अंतराल में शामिल नहीं किया जाता।

या फिर हम 10, 30 आदि मानों को क्रमशः वर्ग अंतराल "10 से 20" तथा "30 से 40" में रख सकते हैं। इस स्थिति में वर्ग की उच्च सीमा को वर्ग अंतराल में शामिल नहीं किया जाता।

सतत चर के उदाहरण

मान लें कि हमारे पास किसी चर के आँकड़े उपलब्ध हों, जैसे कद (से.मी.) या व.जन (कि.ग्रा.)। यह आँकड़ा सतत प्रकार का है। ऐसी स्थितियों में वर्ग अंतराल निम्नलिखित प्रकार से दर्शाया जा सकता है-

30 कि.ग्रा.- 39.999...कि.ग्रा.

40 कि.ग्रा.- 49.999...कि.ग्रा.

50 कि.ग्रा.- 59.999...कि.ग्रा. आदि।

इन वर्ग अंतरालों को निम्नलिखित प्रकार से समझा जा सकता है-

30 कि.ग्रा. और अधिक तथा 40 कि.ग्रा. से कम

40 कि.ग्रा. और अधिक तथा 50 कि.ग्रा. से कम

50 कि.ग्रा. और अधिक तथा 60 कि.ग्रा. से कम आदि।

सारणी 3.4

एक कंपनी के 550 कर्मचारियों की आय का बारंबारता वितरण

आय (रु में)	कर्मचारियों की संख्या
800-899	50
900-999	100
1000-1099	200
1100-1199	150
1200-1299	40
1300-1399	10
योग	550

वर्ग अंतराल में समायोजन

सारणी 3.4 में समावेशी विधि के सूक्ष्म अध्ययन से पता चलता है कि यद्यपि चर 'आय' एक संतत चर है, तथापि जब वर्गों को बनाया जाता है तो संततता नहीं रहती। हम एक वर्ग की उच्च सीमा तथा अगले वर्ग की निम्न सीमा में 'अंतर' या असंततता पाते हैं। उदाहरण के लिए, पहले वर्ग की उच्च सीमा 899 और दूसरे वर्ग की निम्न सीमा 900 के बीच हम 1 (एक) का 'अंतर' पाते हैं। तब हम आँकड़ों के वर्गीकरण में चर की संततता को कैसे सुनिश्चित करते हैं? इसे वर्ग अंतराल के बीच समायोजन करके किया जाता है। समायोजन निम्नलिखित तरीके से किया गया है।

1. द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा और प्रथम वर्ग की उच्च सीमा के बीच अंतर पता करें। उदाहरण के लिए, सारणी 3.4 में द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा 900 और प्रथम वर्ग की उच्च सीमा 899 के बीच अंतर 1 है (अर्थात 900 - 899 = 1)।
2. प्राप्त किए गए अंतर (1) को 2 से विभाजित करें (अर्थात 1/2 = 0.5)।
3. सभी वर्गों की निम्न सीमाओं से (2) में प्राप्त किए गए मान को घटाइए (निम्न वर्ग सीमा - 0.5)।
4. सभी वर्गों की उच्च सीमा में (2) में प्राप्त किए गए मान को जोड़िए (उच्च वर्ग सीमा + 0.5)।

समायोजन के पश्चात्, जिससे बारंबारता वितरण में आँकड़ों की संततता की पुनः प्राप्ति होती है, सारणी 3.4 संशोधित होकर सारणी 3.5 बन जाती है।

वर्ग सीमाओं में समायोजन के पश्चात्, समानता (1) जोकि वर्ग चिह्न का मान निर्धारित करती है, निम्नलिखित प्रकार से संशोधित हो जाएगीः

समायोजित वर्ग चिह्न = (समायोजित उच्च वर्ग सीमा + समायोजित निम्न वर्ग सीमा)/2

सारिणी 3.5
एक कंपनी के 550 कर्मचारियों की आय का बारंबारता वितरण

आय (रु में)	कर्मचारियों की संख्या
799.5-899.5	50
899.5-999.5	100
999.5-1099.5	200
1099.5-1199.5	150
1199.5-1299.5	40
1299.5-1399.5	10
योग	550

हमें प्रत्येक वर्ग की बारंबारता कैसे प्राप्त करनी चाहिए

साधारण शब्दों में, एक प्रेक्षण की बारंबारता का अर्थ है कि अपरिष्कृत आँकड़ों में कितनी बार वह प्रेक्षण प्रकट होता है। सारणी 3.1 में, हमने देखा कि 40 का मान तीन बार आया है, जबकि 0 और 10 का मान एक बार, 49 का मान 5 बार और ऐसे ही अन्य मान आये हैं। इस प्रकार से 40 की बारंबारता 3, 0 की 1, 10 की 1, 49 की 5 तथा ऐसे ही। लेकिन जब आँकड़े वर्गों में समूहित कर दिए जाते हैं, जैसा कि उदाहरण 3 में किया गया है, तो किसी वर्ग की बारंबारता से तात्पर्य उस वर्ग के मानों की संख्याओं से है। वर्ग-बारंबारताओं की गिनती विशेष वर्ग के सामने मिलान चिह्नों को लगाकर की जाती है।

मिलान चिह्न अंकन द्वारा वर्ग बारंबारता को ज्ञात करना

मिलान चिह्न (/) किसी वर्ग के प्रत्येक छात्र के सामने लगाया जाता है, जिसके प्राप्तांक उस वर्ग में शामिल हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी छात्र का प्राप्तांक 57 है तो उस छात्र के लिए वर्ग 50-60 में एक मिलान चिह्न (/) लगाया जाता है। यदि प्राप्तांक 71 हैं तो मिलान चिह्न (/) को वर्ग 70-80 में लगाया जाता है। यदि कोई 40 अंक प्राप्त करता है तो उसके लिए मिलान चिह्न वर्ग 40-50 में लगाया जाता है। सारणी 3.1 के 100 छात्रों के गणित में प्राप्तांकों के मिलान चिह्नों को सारणी 3.6 में दिखाया गया है।

मिलान चिह्नों का परिकलन तब आसान हो जाता है जब 4 चिह्न खड़े (////) लगाए जाते हैं और पाँचवाँ चिह्न सबको काटता हुआ तिरछा लगाया जाता है, जैसे (~~////~~)। मिलान चिह्नों की गणना पाँच के समूह में की जाती है, इसलिए यदि किसी वर्ग में 16 मिलान चिह्न हैं तो उन्हें इस प्रकार से ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ / लिखते हैं, ताकि परिकलन में सुविधा रहे। इसलिए एक वर्ग की बारंबारता उतनी ही होगी, जितनी उस वर्ग में मिलान चिह्नों की संख्या।

सूचना की हानि (Loss of Information)

बारंबारता वितरण के रूप में आँकड़ों के वर्गीकरण में एक अंतर्निहित दोष पाया जाता है। यह अपरिष्कृत आँकड़ों का सारांश प्रस्तुत कर उन्हें संक्षिप्त एवं बोधगम्य तो बनाता है, परंतु इसमें वे विस्तृत विवरण नहीं प्रकट हो पाते जो अपरिष्कृत आँकड़ों में पाए जाते हैं। यद्यपि अपरिष्कृत आँकड़ों को वर्गीकृत करने में सूचना की क्षति होती है, तथापि आँकड़ों को वर्गीकरण द्वारा संक्षिप्त करने पर पर्याप्त जानकारी मिल जाती है। एक बार जब आँकड़ों को वर्गों में समूहित कर दिया जाता है तब व्यष्टि प्रेक्षणों का आगे सांख्यकीय परिकलनों में कोई महत्व नहीं होता। उदाहरण 4 में, वर्ग 20-30 के अंतर्गत 6 प्रेक्षण 25, 25, 20, 22, 25 एवं 28 हैं। इसलिए जब इन आँकड़ों को बारंबारता वितरण में वर्ग 20-30 में समूहित कर दिया जाता है, तब यह बारंबारता वितरण उस वर्ग की बारंबारता (जैसे 6) को दिखाता है, न कि उनके वास्तविक मानों को। इस वर्ग के सभी मानों को उस वर्ग के वर्ग-अंतराल के मध्य मान या वर्ग चिह्न के बराबर माना जाता है (अर्थात् 25)। आगे की सांख्यिकीय परिकलनों के लिए वर्ग चिह्न के मान को आधार बनाया जाता है, न कि उस वर्ग के प्रेक्षणों के मान

को। यही बात सभी वर्गों के लिए सत्य है। इस प्रकार प्रेक्षणों के वास्तविक मान के स्थान पर वर्ग चिह्नों के प्रयोग को सांख्यिकीय विधियों में शामिल करने पर पर्याप्त मात्रा में सूचनाओं की क्षति होती है। यद्यपि अपरिष्कृत आँकड़ों का जैसा कि नीचे इससे अधिक दिखाया गया है, अधिक अर्थपूर्ण लगता है।

असमान वर्गों में बारंबारता वितरण

अब तक आप समान वर्ग अंतराल के बारंबारता वितरण से परिचित हो चुके हैं। आप जान गए हैं कि इन्हें अपरिष्कृत आँकड़ों से कैसे गठित किया जाता है। लेकिन कुछ मामलों में असमान वर्ग अंतराल के साथ बारंबारता वितरण अधिक उपयुक्त होता है। यदि आप उदाहरण 4 के बारंबारता वितरण की सारणी 3.6 को देखें, तो आप पायेंगे कि अधिकांश प्रेक्षण वर्ग 40-50, 50-60 तथा 60-70 में संकेंद्रित हैं। उनकी बारंबारताएँ क्रमशः 21, 23 एवं 19 हैं। इसका अर्थ है कि 100 छात्रों में से 63 (21 + 23 + 19) प्रेक्षण इन वर्गों में सकेंद्रित हैं। इस प्रकार 63 प्रतिशत आँकड़े 40-70 के बीच समाहित है और आँकड़ों का शेष 37 प्रतिशत 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 तथा 70-80, 80-90 एवं 90-100 वर्गों में हैं। इन वर्गों में प्रेक्षणों का विरल घनत्व है। आप यह भी देखेंगे कि इन वर्गों के प्रेक्षणों में अन्य वर्गों की अपेक्षा उनके अपने वर्गों के वर्ग-चिह्नों से अधिक विचलन है। लेकिन यदि वर्गों का गठन इस प्रकार से करना हो कि वर्ग चिह्न, जहाँ तक संभव है, उस मान के बराबर हो जाए, जिसके आस-पास उस वर्ग के प्रेक्षणों के संकेंद्रण की प्रवृत्ति होती है, तो असमान वर्ग अंतराल अधिक उपयुक्त होता है।

असमान वर्गों के रूप में, सारणी 3.7 में सारणी 3.6 के उसी बारंबारता वितरण को दिखाया गया है। 40-50, 50-60 तथा 60-70 के प्रत्येक वर्ग को दो भागों में विभाजित किया गया है। वर्ग 40-50 को अब 40-45 तथा 45-50 में बाँटा गया है। वर्ग

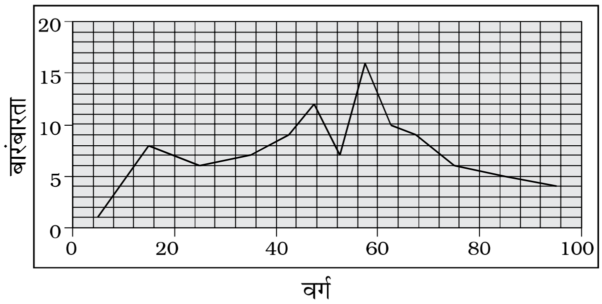
सारणी 3.6

गणित में 100 छात्रों के प्राप्तांको के मिलान चिह्न

वर्ग	प्रेक्षण	मिलान चिह्न	बारंबारता	वर्ग चिह्न
0-10	0	/	1	5
10-20	10, 14, 17, 12, 14, 12, 14, 14	~~////~~ ///	8	15
20-30	25, 25, 20, 22, 25, 28	~~////~~ /	6	25
30-40	30, 37, 34, 39, 32, 30, 35,	~~////~~ //	7	35
40-50	47, 42, 49, 49, 45, 45, 47, 44, 40, 44, 49, 46, 41, 40, 43, 48, 48, 49, 49, 40, 41	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	21	45
50-60	59, 51, 53, 56, 55, 57, 55, 51, 50, 56, 59, 56, 59, 57, 59, 55, 56, 51, 55, 56, 55, 50, 54	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	23	55
60-70	60, 64, 62, 66, 69, 64, 64, 60, 66, 69, 62, 61, 66, 60, 65, 62, 65, 66, 65	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////	19	65
70-80	70, 75, 70, 76, 70, 71	~~////~~ /	6	75
80-90	82, 82, 82, 80, 85	~~////~~	5	85
90-100	90, 100, 90, 90	////	4	95
	योग		100	

50-60 को 50-55 और 55-60 में बाँटा गया है तथा वर्ग 60-70 को 60-65 तथा 65-70 में बाँटा गया है। अब नए वर्ग 40-45, 45-50, 50-55, 55-60, 60-65 तथा 65-70 हैं जिनमें वर्ग अंतराल 5 है। बाकी अन्य वर्गों 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, तथा 70-80, 80-90, 90-100 में ठीक वही पूर्ववत वर्ग अंतराल 10 है। इस सारणी का अंतिम स्तंभ इन वर्गों के नये वर्ग चिह्नों को प्रदर्शित कर रहा है। सारणी 3.6 के पुराने वर्ग चिह्नों से उनकी तुलना करें। ध्यान दें कि इन वर्गों के प्रेक्षणों में नये वर्ग चिह्न मानों की अपेक्षा पुराने वर्ग चिह्न मानों से विचलन अधिक है। इस प्रकार से नये वर्ग चिह्न मान, इन वर्गों के आँकड़ों का पुराने मान की अपेक्षा बेहतर प्रतिनिधित्व करते हैं।

चित्र 3.2 में, सारणी 3.7 के बारंबारता वितरण के बारंबारता वक्र को दिखाया गया है। इसमें सारणी के वर्ग चिह्नों को x-अक्ष पर तथा बारंबारताओं को y-अक्ष पर आलेखित किया गया है।



3.2 बारंबारता वक्र

क्रियाकलाप

- यदि आप चित्र 3.2 के साथ चित्र 3.1 की तुलना करते हैं तो आप क्या देखते हैं? क्या आपने इनके बीच कोई अंतर पाया? क्या आप उस अंतर की व्याख्या कर सकते हैं?

सारणी 3.7

असमान वर्गों में बारंबारता वितरण

वर्ग	प्रेक्षण	बारंबारता	वर्ग चिह्न
0-10	0	1	5
10-20	10, 14, 17, 12, 14, 12, 14, 14	8	15
20-30	25, 25, 20, 22, 25, 28	6	25
30-40	30, 37, 34, 39, 32, 30, 35	7	35
40-45	42, 44, 40, 44, 41, 40, 43, 40, 41	9	42.5
45-50	47, 49, 49, 45, 45, 47, 49, 46, 48, 48, 49, 49	12	47.5
50-55	51, 53, 51, 50, 51, 50, 54	7	52.5
55-60	59, 56, 55, 57, 55, 56, 59, 56, 59, 57, 59, 55, 56, 55, 56, 55	16	57.5
60-65	60, 64, 62, 64, 64, 60, 62, 61, 60, 62	10	62.5
65-70	66, 69, 66, 69, 66, 65, 65, 66, 65	9	67.5
70-80	70, 75, 70, 76, 70, 71	6	75
80-90	82, 82, 82, 80, 85	5	85
90-100	90, 100, 90, 90	4	95
	योग	100	

बारंबारता सरणी (Frequency Array)

अब तक हमने गणित में 100 छात्रों द्वारा प्राप्त किए गए प्रतिशत अंकों के उदाहरण का प्रयोग करते हुए संतत चर के लिए आँकड़ों के वर्गीकरण पर चर्चा की है। विविक्त चर के लिए, आँकड़ों का वर्गीकरण बारंबारता सरणी के नाम से जाना जाता है। चूँकि एक विविक्त चर मानों को धारण करता है न कि दो पूर्णांकों के बीच माध्यमिक भिन्नीय मानों को, अतः हम ऐसी बारंबारता रखते हैं जोकि अपने पूर्णांक मानों से संगत हों।

सारणी 3.8

परिवारों के आकार की बारंबारता सारणी

परिवार का आकार	परिवारों की संख्या
1	5
2	15
3	25
4	35
5	10
6	5
7	3
8	2
योग	100

सारणी 3.8 में दिया गया उदाहरण बारंबारता सरणी को प्रदर्शित करता है। इस सारणी में चर 'परिवार का आकार' एक विविक्त चर है जो सारणी में दिखाए गए पूर्णांकों को ही धारण करता है।

6. द्विचर बारंबारता वितरण

बहुत बार, जब हम किसी जनसंख्या में से एक प्रतिदर्श लेते हैं, तो हम प्रतिदर्श के हर अवयव से एक से अधिक प्रकार की सूचना संगृहीत करते हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि हमने एक शहर की कंपनियों की सूची में से 20 कंपनियों का एक प्रतिदर्श लिया है। मान लीजिए कि हम प्रत्येक कंपनी से P बिक्री तथा विज्ञापनों पर किए गए व्यय की जानकारी संगृहीत करते हैं। इस स्थिति में, हमारे पास प्रतिदर्श के द्विचर आँकड़े हैं। इस तरह के द्विचर आँकड़ों को द्विचर बारंबारता वितरण द्वारा संक्षिप्त रूप में दर्शाया जा सकता है।

एक द्विचर बारंबारता वितरण को दो चरों के बारंबारता वितरण के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

सारणी 3.9, 20 कंपनियों के दो चर-बिक्री एवं विज्ञापन व्यय (लाख रु में) के बारंबारता वितरण को प्रदर्शित कर रही है। यहाँ पर बिक्री मानों को भिन्न स्तंभों में तथा विज्ञापन व्यय के मानों को भिन्न पंक्तियों में वर्णित किया गया है। प्रत्येक प्रकोष्ठ संतत पंक्ति एवं स्तंभ के मान की बारंबारता दिखाता है। उदाहरण के लिए, यहाँ पर तीन फर्म ऐसी हैं, जिनकी बिक्री रु 135-145 लाख रु के बीच है और उनका विज्ञापन व्यय 64-66 हजार रु

सारणी 3.9

20 कंपनियों की बिक्री (लाख रु में) एवं विज्ञापन व्यय (हजार रु में) का द्विचर बारंबारता वितरण

	115-125	125-135	135-145	145-155	155-165	165-175	योग
62-64	2	1					3
64-66	1		3				4
66-68	1	1	2	1			5
68-70		2		2			4
70-72		1	1		1	1	4
योग	4	5	6	3	1	1	20

के बीच है। द्विचर वितरण के बारे में अध्याय 8 'सहसंबंध' में अध्ययन किया जाएगा।

7. **सारांश**

प्राथमिक या द्वितीयक स्रोतों से संगृहीत किए गए आँकड़े अपरिष्कृत या अवर्गीकृत होते हैं। जब एक बार आँकड़े संगृहित हो जाएँ तो अगला चरण आगे के सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए आँकड़ों का वर्गीकरण करना है। वर्गीकरण से आँकड़ों में क्रमबद्धता आ जाती है। यह अध्याय आप को यह जानने के योग्य बनाता है कि आँकड़ों को बारंबारता वितरण के माध्यम से बोधगम्य तरीके से किस प्रकार वर्गीकृत किया जाता है। एक बार जब आप वर्गीकरण की तकनीकों को जान जाते हैं तो आपके लिए यह आसान होगा कि आप संतत तथा विविक्त दोनों चरों के लिए ही बारंबारता वितरण की रचना कर सकें।

पुनरावर्तन

- वर्गीकरण अपरिष्कृत आँकड़ों को क्रमबद्धता प्रदान करता है।
- बारंबारता वितरण यह प्रदर्शित करता है कि किसी चर के विभिन्न मान, संगत वर्ग-बारंबारताओं सहित, किस प्रकार विभिन्न वर्गों में वितरित किए जाते हैं।
- अपवर्जी विधि के अंतर्गत उच्च वर्ग सीमा को छोड़ा तथा निम्नवर्ग सीमा को शामिल किया जाता है।
- समावेशी विधि में निम्नवर्ग सीमा तथा उच्च वर्ग सीमा, दोनों को ही शामिल किया जाता है।
- बारंबारता वितरण में, आगे के सांख्यिकीय परिकलन केवल वर्ग चिह्न मान पर आधारित होते हैं, न कि प्रेक्षणों के मान पर।
- वर्गों को इस प्रकार से बनाया जाना चाहिए कि, जहाँ तक संभव हो सके, प्रत्येक वर्ग का वर्ग चिह्न उस मान के अधिक से अधिक निकटतम हो, जिस मान के आस-पास, किसी वर्ग के प्रेक्षणों की संकेन्द्रण की प्रवृत्ति हो।

अभ्यास

1. निम्नलिखित में से कौन सा विकल्प सही है?
   - एक वर्ग मध्यबिन्दु बराबर हैः
     (क) उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा के औसत के।
     (ख) उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा के गुणनफल के।
     (ग) उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा के अनुपात के।
     (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं।
   - दो चरों के बारंबारता वितरण को इस नाम से जानते हैंः
     (क) एक विचर वितरण
     (ख) द्विचर वितरण
     (ग) बहुचर वितरण
     (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं
   - वर्गीकृत आँकड़ों में साँख्यिकीय परिकलन आधारित होता हैः
     (क) प्रेक्षणों के वास्तविक मानों पर
     (ख) उच्च वर्ग सीमाओं पर
     (ग) निम्न वर्ग सीमाओं पर
     (घ) वर्ग के मध्यबिन्दुओं पर
   - अपवर्जी विधि के अंतर्गत
     (क) किसी वर्ग की उच्च वर्ग सीमा को वर्ग अंतराल में समावेशित नहीं करते।
     (ख) किसी वर्ग की उच्च वर्ग सीमा को वर्ग अंतराल में समावेशित करते हैं।
     (ग) किसी वर्ग की निम्न वर्ग सीमा को वर्ग अंतराल में समावेशित नहीं करते।
     (घ) किसी वर्ग की निम्न वर्ग सीमा को वर्ग अंतराल में समावेशित करते हैं।
   - परास का अर्थ है
     (क) अधिकतम एवं न्यूनतम प्रेक्षणों के बीच अंतर
     (ख) न्यूनतम एवं अधिकतम प्रेक्षणों के बीच अंतर
     (ग) अधिकतम एवं न्यूनतम प्रेक्षणों का औसत
     (घ) अधिकतम एवं न्यूनतम प्रेक्षणों का अनुपात
2. वस्तुओं को वर्गीकृत करने में क्या कोई लाभ हो सकता है? अपने दैनिक जीवन से एक उदाहरण देकर व्याख्या कीजिए।
3. चर क्या है? एक संतत तथा विविक्त चर के बीच भेद कीजिए।
4. आँकड़ों के वर्गीकरण में प्रयुक्त अपवर्जी तथा समावेशी विधियों की व्याख्या कीजिए।
5. सारणी 3.2 के आँकड़ों का प्रयोग करें, जो 50 परिवारों के भोजन पर मासिक व्यय (रु में) को दिखलाती है, और

(क) भोजन पर मासिक परिवारिक व्यय का प्रसार ज्ञात कीजिए।

(ख) परास को वर्ग अंतराल की उचित संख्याओं में विभाजित करें तथा व्यय का बारंबारता वितरण प्राप्त करें।

- उन परिवारों की संख्या पता कीजिए जिनका भोजन पर मासिक व्यय

  (क) 2000/- रु से कम है

  (ख) 3000/- रु से अधिक है

  (ग) 1500/- रु और 2500/- रु के बीच है

6. एक शहर में, यह जानने हेतु 45 परिवारों का सर्वेक्षण किया गया कि वे अपने घरों में कितनी संख्या में सेल फोनों का इस्तेमाल करते हैं। नीचे दिए गए उनके उत्तरों के आधार पर एक बारंबारता सरणी तैयार कीजिए।

1	3	2	2	2	2	1	2	1	2	2	3	3	3	3
3	3	2	3	2	2	6	1	6	2	1	5	1	5	3
2	4	2	7	4	2	4	3	4	2	0	3	1	4	3

7. वर्गीकृत आँकड़ों में 'सूचना की क्षति' का क्या अर्थ है?

8. क्या आप इस बात से सहमत है कि अपरिष्कृत आँकड़ों की अपेक्षा वर्गीकृत आँकड़े बेहतर होते हैं?

9. एक-विचर एवं द्विचर बारंबारता वितरण के बीच अंतर बताइए?

10. निम्नलिखित आँकडों के आधार पर 7 का वर्ग अंतराल लेकर समावेशी विधि द्वारा एक बारंबारता वितरण तैयार कीजिए।

28	17	15	22	29	21	23	27	18	12	7	2	9	4
1	8	3	10	5	20	16	12	8	4	33	27	21	15
3	36	27	18	9	2	4	6	32	31	29	18	14	13
15	11	9	7	1	5	37	32	28	26	24	20	19	25
19	20	6	9										

क्रियात्मक गतिविधि

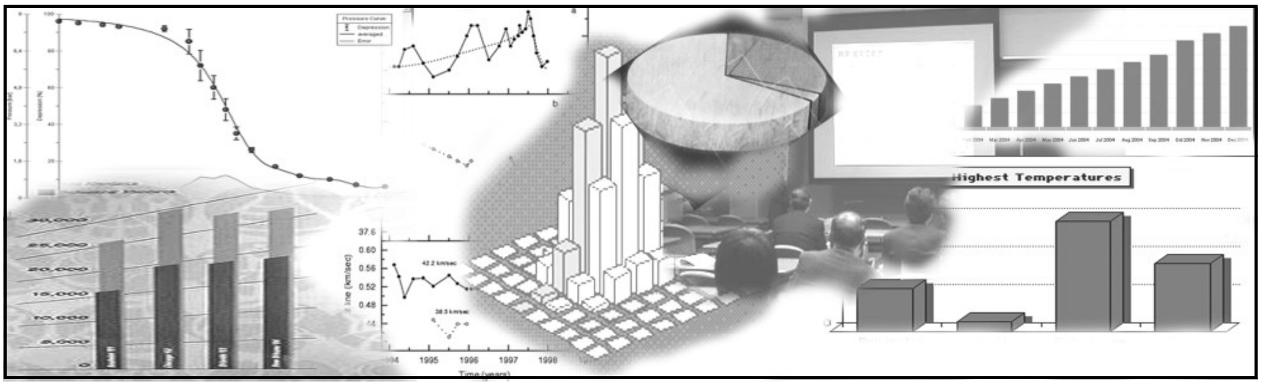
- अपनी पुरानी अंक सारणियों से, अपनी पूर्व कक्षा में अर्द्धवार्षिक तथा वार्षिक परीक्षाओं में प्राप्त गणित के प्राप्तांकों को पता कीजिए। इन्हें वर्ष के क्रम में व्यवस्थित कीजिए। अब यह जाँच कीजिए कि क्या उक्त विषय में आप द्वारा प्राप्त किए अंक चर हैं या नहीं। इसके साथ यह भी देखिए कि क्या बाद के वर्षों में गणित में आपकी स्थिति में सुधार हुआ है?

11099CH04

अध्याय

4

आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण



इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे किः

- सारणियों का प्रयोग कर आँकड़े प्रस्तुत कर सकें;
- उपयुक्त आरेखों द्वारा आँकड़े प्रस्तुत कर सकें।

1. प्रस्तावना

पिछले अध्यायों में आप यह पढ़ चुके हैं कि आँकड़ों को कैसे संगृहीत और व्यवस्थित किया जाता है। सामान्यतः आँकड़ों का परिमाण अधिक होता है, जिन्हें सुसंबद्ध एवं प्रस्तुति-योग्य रखने की आवश्यकता होती है। इस अध्याय में आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की जानकारी दी जाएगी, ताकि संग्रह किए गए वृहद् आँकड़ों को आसानी से समझ कर उनका प्रयोग किया जा सके। सामान्यतः आँकड़े तीन प्रकार से प्रस्तुत किए जा सकते हैंः

- पाठ-विषयक या वर्णनात्मक प्रस्तुतीकरण
- सारणीबद्ध प्रस्तुतीकरण
- आरेखीय प्रस्तुतीकरण

2. आँकड़ों का पाठ-विषयक प्रस्तुतीकरण

पाठ-विषयक प्रस्तुतीकरण में आँकड़ों का विवरण पाठ में ही दिया जाता है। जब आँकड़ों का परिमाण बहुत अधिक न हो तो प्रस्तुतीकरण का यह स्वरूप अधिक उपयोगी होता है। निम्नलिखित स्थितियों को देखेंः

स्थिति 1

बिहार के एक शहर में, 8 सितंबर 2005 को पेट्रोल तथा डीजलों की कीमतों की वृद्धि के विरोध में आयोजित एक बंद के दौरान 5 पेट्रोल पंप खुले तथा 17 बंद पाए गए और इसी प्रकार से 2

विद्यालय बंद तथा 9 विद्यालय खुले पाए गए।

स्थिति 2

भारत की जनगणना 2001 की रिपोर्ट के अनुसार भारत की जनसंख्या बढ़कर 102 करोड़ हो गई, जिसमें 53 करोड़ पुरुषों के मुकाबले 49 करोड़ महिलाएँ थीं। 74 करोड़ लोग अभी भी भारत के ग्रामीण क्षेत्रों में और केवल 28 करोड़ लोग शहरों एवं कस्बों में रह रहे थे। पूरे देश में 40 करोड़ श्रमिकों के मुकाबले गैर-श्रमिकों की संख्या 62 करोड़ थी। शहरी जनसंख्या में गैर-श्रमिकों की संख्या ग्रामीण जनसंख्या की अपेक्षा अधिक (19 करोड़) थी, जहाँ 74 करोड़ की ग्रामीण जनसंख्या में 31 करोड़ श्रमिक हैं।

3. आँकड़ों का सारणीबद्ध प्रस्तुतीकरण

सारणीबद्ध प्रस्तुतीकरण में, आँकड़ों को पंक्तियों (क्षैतिज) तथा स्तंभों (ऊर्ध्वाधर) के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। उदाहरण के लिए नीचे दी गई सारणी 4.1 को देखें, जिसमें साक्षरता दर के बारे में जानकारी दी गई है। इसमें तीन पंक्तियाँ (पुरुष, स्त्री तथा योग) और तीन स्तंभ दिए गए (शहरी, ग्रामीण एवं योग) हैं। इसे 3 × 3 सारणी कहा जाता है, जिसमें 9 बॉक्स में 9 मदों की जानकारी दी गई है, जिसे 'सारणी की कोष्ठिका' कहा जाता है। प्रत्येक कोष्ठिका किसी लिंग ('स्त्री', 'पुरुष' या 'योग') की विशेषता और उसकी संख्या (ग्रामीण व्यक्तियों, शहरी व्यक्तियों तथा उनके योग का कुल साक्षरता प्रतिशत) की जानकारी देता है। आँकड़ों के सारणीयन का सर्वाधिक महत्वपूर्ण लाभ यह है कि आँकड़ों को सांख्यिकीय प्रयोग एवं उसके आधार पर निर्णय लेने के लिए व्यवस्थित करता है। सारणीयन में प्रयुक्त वर्गीकरण चार प्रकार के होते हैं:

- गुणात्मक
- मात्रात्मक
- कालिक, और
- स्थानिक

गुणात्मक वर्गीकरण

जब वर्गीकरण गुणात्मक विशिष्टता के साथ किया जाता है, जैसे कि सामाजिक स्थिति, भौतिक स्थिति, राष्ट्रीयता, इत्यादि, तो इसे गुणात्मक वर्गीकरण कहा जाता है। उदाहरण के लिए, सारणी 4.1 में वर्गीकरण की विशिष्टता लिंग एवं स्थान के आधार पर है, जो स्वभाव में गुणात्मक है।

सारणी 4.1

लिंग एवं स्थान के अनुसार भारत में साक्षरता (प्रतिशत)

लिंग	ग्रामीण	शहरी	योग
पुरुष	79	90	82
स्त्री	59	80	65
योग	68	84	74

स्रोतः 'भारत की जनगणना' 2011, साक्षरता दर का संबंध 7 वर्ष या अधिक आयु वाली जनसंख्या से है।

मात्रात्मक वर्गीकरण

मात्रात्मक वर्गीकरण में आँकड़ों का वर्गीकरण उन विशिष्टताओं के आधार पर किया जाता है जो स्वाभाविक रूप से मात्रात्मक होती हैं। दूसरे शब्दों में, इन विशिष्टताओं को मात्रात्मक रूप से मापा जा सकता है, जैसे आयु, कद, उत्पादन, आय इत्यादि मात्रात्मक विशिष्टताएँ हैं। विचाराधीन विशेषताओं के मानों को दर्शाने के लिए सीमाएँ निर्धारित करके वर्गों का गठन किया जाता है, जिन्हें वर्ग-सीमाएँ कहते हैं। मात्रात्मक वर्गीकरण का एक उदाहरण सारणी 4.2 में दिया गया है। सारणी में छूटे हुए अंकों की गणना करें।

सारणी 4.2

बिहार में एक चुनावी अध्ययन हेतु 542 उत्तरदाताओं का आयु के अनुसार वितरण

आयु समूह (वर्ष)	उत्तरदाताओं की संख्या	प्रतिशत
20-30	3	0.55
30-40	61	11.25
40-50	132	24.35
50-60	153	28.24
60-70	140	25.83
70-80	51	9.41
80-90	2	0.37
योग	542	100.00

स्रोतः एसेंबली इलेक्शन, पटना सेन्ट्रल कॉन्स्टीट्यूएंसी, ए. एन. सिन्हा इंस्टीट्यूट ऑफ सोशल स्टडीज, पटना।

यहाँ पर वर्गीकरण की विशेषता आयु (वर्षों में) है, जिसका मात्रात्मक वर्गीकरण किया जा सकता है। विवेचना करें कि कैसे सारणी 4.1 में कुल मान तक पहुँचा गया।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- अपनी कक्षा के छात्रों की रुचि के क्रमानुसार विभिन्न समाचार चैनलों, जैसे स्टार न्यूज, जी न्यूज, बी.बी.सी. वर्ल्ड, सी.एन.एन., आजतक तथा डी.डी. न्यूज के लिए एक सारणी बनाएँ।
- एक सारणी बनाएँ, जिसमें, आपकी कक्षा के छात्रों के संबंध में निम्नलिखित दर्शाए गए होंः
  (क) कद (सें.मी. में) और
  (ख) वजन (किग्रा में)

कालिक वर्गीकरण

इस वर्गीकरण में वर्गीकरण का आधार समय होता है तथा आँकड़ों को समय के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है। समय घंटों, दिनों, हफ्तों, महीनों, वर्षों इत्यादि में हो सकता है। उदाहरण के लिए सारणी 4.3 देखें।

सारणी 4.3

एक चाय की दुकान की 1995 से 2000 तक की वार्षिक बिक्री का विवरण

वर्ष	बिक्री (लाख रु० में)
1995	79.2
1996	81.3
1997	82.4
1998	80.5
1999	100.2
2000	91.2

आँकड़ा स्रोतः अप्रकाशित आँकड़े

उपर्युक्त सारणी में वर्गीकरण का आधार एक 'वर्ष' में बिक्री है जिसके मान समय के स्केल पर दिखाए गए हैं।

क्रियात्मक गतिविधि

- अपने विद्यालय के कार्यालय में जाइए और विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में अध्ययन करने वाले छात्रों की संख्या का पिछले 10 वर्षों के आँकड़ों का संग्रह कीजिए। इन आँकड़ों को सारणीबद्ध ढंग से प्रस्तुत करें।

स्थानिक वर्गीकरण

जब कोई वर्गीकरण इस प्रकार से किया जाए, कि वर्गीकरण का आधार स्थान हो, तो इसे स्थानिक-वर्गीकरण कहते हैं। यह स्थान कोई गाँव/कस्बा, खंड, जिला, राज्य या देश आदि हो सकता है।

सारणी 4.4 स्थानिक वर्गीकरण का एक उदाहरण है।

सारणी 4.4

एक वर्ष में भारत द्वारा शेष विश्व में कुल निर्यात की भागीदारी (का प्रतिशत)

गंतव्य स्थान	निर्यात भागीदारी
यू.एस.ए.	12.5
जर्मनी	2.4
अन्य यूरोपीय संघ के देश	10.9
यू.के.	3.1
जापान	2.2
रूस	0.7
चीन	4.7
पश्चिमी एशिया- गल्फ सहकारी परिषद् 15.3	
शेष एशिया	29.4
अन्य	18.8
सभी	100.0

(**कुल निर्यातः** यू.एस.डॉलर 314.4 बिलियन)

क्रियात्मक गतिविधि

- अपनी कक्षा के छात्रों के मूल राज्यों/रिहायशी इलाकों के आधार पर उन से प्राप्त आँकड़ों को प्रस्तुत करते हुए एक सारणी बनाएँ।

4. आँकड़ों का सारणीकरण तथा सारणी के अंग

सारणी के निर्माण के लिए, सबसे पहले यह जानना आवश्यक है कि एक अच्छी सांख्यिकीय सारणी के कौन-कौन से महत्वपूर्ण अंग हैं। जब इन सभी अंगों को सुव्यस्थित कर एक साथ प्रस्तुत किया जाता है, तो ये 'सारणी' के रूप में हो जाते हैं। सारणी की संकल्पना का सबसे सरल तरीका यह है कि आँकड़ों को कुछ व्याख्यात्मक सूचनाओं के साथ पंक्तियों एवं स्तंभों में व्यवस्थित कर दिया जाए। सारणीकरण के कार्य को एकविध, द्विविध या त्रिविध वर्गीकरण द्वारा किया जा सकता है जो कि आँकड़ों की विशिष्टताओं की संख्या पर निर्भर करता है। एक अच्छी सारणी में निम्न बातें आवश्यक रूप से होनी चाहिएः

(क) सारणी संख्या

किसी सारणी की संख्या उसकी पहचान के लिए निर्धारित की जाती है। यदि कहीं एक से अधिक सारणियाँ प्रस्तुत की जाती हैं, तो उन सारणियों की संख्या ही उन्हें एक-दूसरे से अलग करती है। इसे सारणी के ऊपर या शीर्षक की शुरुआत के साथ दिया जाता है। यदि एक पुस्तक में बहुत सारी सारणियाँ हैं, तो संख्या आरोही क्रम में दी जाती है। सामान्यतः सारणी की अवस्थिति के अनुसार सारणी की पहचान के लिए संख्याएँ जैसे 1.2, 3.1 इत्यादि भी दी जा सकती हैं। उदाहरण के लिए, सारणी संख्या 4.5 को अध्याय 4 की सारणी संख्या 5 (देखें सारणी 4.5) के रूप में पहचाना जा सकता है।

(ख) शीर्षक

सारणी का शीर्षक सारणी की विषयवस्तु की व्याख्या करता है। इसे बहुत ही स्पष्ट, संक्षिप्त एवं सावधानी पूर्ण चुने गए शब्दों में होना चाहिए, ताकि सारणी का भाव बिल्कुल स्पष्ट हो जिसमें अस्पष्टता न हो। इसे सारणी के बिल्कुल ऊपर तथा सारणी संख्या के ठीक बाद में या इसके ठीक नीचे दिया जाता है। (देखें सारणी 4.5)

(ग) उप शीर्षक या स्तंभ शीर्षक

सारणी के प्रत्येक स्तंभ के ऊपर की ओर एक स्तंभ नाम दिया जाता है जो स्तंभ के अंतर्गत दी गई संख्याओं की व्याख्या करता है। इसे उपशीर्षक या स्तंभ शीर्षक कहते हैं। (देखें सारणी 4.5)

(घ) अवशीर्ष या पंक्ति शीर्षक

उपशीर्षक या स्तंभशीर्षक की भाँति सारणी की प्रत्येक पंक्ति को भी एक शीर्षक दिया जाता है। पंक्तियों के नाम को अवशीर्ष या अवशीर्ष मदें भी कहते हैं और संपूर्ण बायें स्तंभ को अवशीर्ष स्तंभ कहा

जाता है। पंक्तिशीर्षकों का संक्षिप्त विवरण सारणी के बिल्कुल ऊपर बायीं ओर दिया जा सकता है। (देखें सारणी 4.5)

(ङ) सारणी का मुख्य भाग

सारणी का मुख्य भाग वह होता है, जिसमें वास्तविक आँकड़े होते हैं। सारणी में किसी भी संख्या/आँकड़े की अवस्थिति उसकी पंक्ति एवं स्तंभ के अनुसार सुनिश्चित होती है। उदाहरण के लिए द्वितीय पंक्ति एवं चौथे स्तंभ के आँकड़ों से यह संकेत मिलता है कि 2001 में ग्रामीण भारत में 25 करोड़ गैर श्रमिक महिलाएँ थीं (देखें सारणी 4.5)।

(च) माप की इकाई

यदि पूरी सारणी में माप की इकाई समान रहे, तो सारणी की संख्याओं (वास्तविक आँकड़ों) को सदैव सारणी के शीर्षक के साथ लिखा जाना चाहिए। यदि सारणी की पंक्तियों या स्तंभों के लिए भिन्न माप इकाइयाँ हों, तो उन इकाइयों की चर्चा निश्चित रूप से 'उपशीर्षक' या 'अवशीर्ष' के साथ की जानी चाहिए। यदि संख्याएँ बहुत बड़ी हैं तो इन्हें पूर्णांक बना देना चाहिए और पूर्णांक बनाने की विधि का संकेत दिया जाना चाहिए (देखें सारणी 4.5)।

सारणी संख्या ↓

शीर्षक ↓

सारणी 4.5 लिंग एवं अवस्थिति के अनुसार श्रमिकों एवं गैर-श्रमिकों के आधार पर भारत की जनसंख्या।

(करोड़) ↑ इकाई

(स्तंभ शीर्षक/उपशीर्षक) ↓

पंक्ति शीर्षक/अवशीर्ष →

← सारणी का मुख्य भाग

अवस्थिति	लिंग	श्रमिक			गैर-श्रमिक	योग
		मुख्य	आंशिक	योग		
ग्रामीण	पुरुष	17	3	20	18	38
	स्त्री	6	5	11	25	36
	योग	23	8	31	43	74
शहरी	पुरुष	7	1	8	7	15
	स्त्री	1	0	1	12	13
	योग	8	1	9	19	28
कुल	पुरुष	24	4	28	25	53
	स्त्री	7	5	12	37	49
	योग	31	9	40	62	102

स्रोतः भारत की जनगणना 2001

↑ स्रोत टिप्पणी

पाद टिप्पणीः संख्याओं को निकटतम करोड़ में पूर्णांकित किया गया है।

↑ पाद टिप्पणी

(**सूचनाः** सारणी 4.5 में उन्हीं आँकड़ों को सारणीबद्ध रूप में प्रस्तुत किया गया है, जिन्हें पाठ-विषयक प्रस्तुतीकरण के क्रम में उदाहरण 2 में प्रस्तुत किया गया था)।

(छ) स्रोत

यह एक संक्षिप्त विवरण या वाक्यांश होता है जिसमें सारणी में प्रस्तुत किए गए आँकड़ों के स्रोत के बारे में बताया जाता है। यदि एक से अधिक स्रोत हैं, तो सभी स्रोतों के बारे में लिखा जाना चाहिए। स्रोत को प्रायः सारणी के नीचे दिया जाता है। (देखें सारणी 4.5)।

(ज) टिप्पणी

टिप्पणी किसी सारणी का अंतिम अंग होता है। पाद टिप्पणी के अंतर्गत किसी सारणी के आँकड़ों की विषय-वस्तु की उन विशिष्टताओं के बारे में व्याख्या की जाती है, जो कि स्वतः स्पष्ट नहीं होती हैं और न ही पहले कहीं उनकी व्याख्या की गई होती है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- किसी सारणी के निर्माण में कम से कम कितनी पंक्तियों एवं स्तंभों की आवश्यकता होती है?
- क्या किसी सारणी के स्तंभ शीर्षक / पंक्ति शीर्षक मात्रात्मक हो सकते हैं?
- पृष्ठ 40 पर दिए गए स्थिति 2 के प्रथम दो पंक्तियों को सारणी के रूप में प्रदर्शित करें। इस अध्याय में भी इसका कुछ विस्तार मिल जाएगा।
- क्या आप सारणी 4.2 और 4.3 में अंकों का ठीक-ठाक निकटन करने के बाद उसे प्रदर्शित कर सकते हैं?

5. आँकड़ों का आरेखी प्रस्तुतीकरण

आँकड़ों को प्रस्तुत करने की यह तीसरी विधि है। यह विधि सारणीकृत या पाठ-विषयक प्रस्तुतीकरण की तुलना में, आँकड़ों के आधार पर, वस्तु-स्थिति को जल्दी समझने में सबसे अधिक सहायक होती है। आँकड़ों के आरेखी प्रस्तुतीकरण से संख्याओं में निहित अमूर्तता कम हो जाती है और वे अधिक मूर्त एवं आसानी से समझने योग्य बन जाते हैं।

सारणी में प्रस्तुत किए गए आँकड़ों की अपेक्षा आरेखी प्रस्तुतीकरण में आँकड़ों की परिशुद्धता थोड़ी कम हो सकती है, किंतु ये सारणी की तुलना में अधिक प्रभावी होते हैं।

सामान्यतः कई प्रकार के आरेखों का प्रयोग होता है। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण इस प्रकार हैंः

(क) ज्यामितीय आरेख

(ख) बारंबारता आरेख

(ग) अंकगणितीय रैखिक आलेख

ज्यामितीय आरेख (Geometric Diagram)

दंड आरेख तथा वृत्त आरेख ज्यामितीय आरेख की श्रेणी में आते हैं। दंड आरेख तीन प्रकार के होते हैः सरल दंड आरेख, बहु दंड आरेख तथा घटक दंड-आरेख।

दंड-आरेख (Bar Diagram)

सरल दंड-आरेख (Simple Bar Diagram)

सरल दंड आरेख के अंतर्गत समान अंतरालों तथा समान विस्तार वाले आयताकार दंडों का एक समूह प्रत्येक श्रेणी/वर्ग के आँकड़ों को दर्शाता है। दंड की ऊँचाई या लंबाई आँकड़े के परिमाण को प्रकट करती है। दंड का निचला छोर आधार रेखा को इस प्रकार स्पर्श करता है कि दंड की ऊँचाई शून्य इकाई से शुरू होती है। दंड-आरेख के दंडों की सापेक्ष ऊँचाई को देखकर, आँकड़ों को अपेक्षाकृत आसानी से समझा जा सकता है। इसके लिए आँकड़े बारंबारता वाले या गैर-बारंबारता वाले दोनों प्रकार के हो सकते हैं। गैर-बारंबारता वाले आँकड़ों में किसी खास विशिष्टता जैसे उत्पादन, फसल, जनसंख्या आदि को विभिन्न समयों या विभिन्न राज्यों के आधार पर लिया जाता है और विशिष्टताओं के मूल्यों के अनुरूप दंडों को आरेख की ऊँचाई के रूप में रखा जाता है। विशिष्टताओं का मापा हुआ (गणना किया हुआ) मान प्रत्येक

मान की पहचान को बनाए रखता है। चित्र 4.1 दंड-आरेख का एक उदाहरण है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- आपने अपने विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में इस वर्ष अध्ययन कर रहे छात्रों की संख्या का संग्रह क्रियाएं कीजिए। अब उसी सारणी को दंड-आरेख द्वारा दिखाएँ।

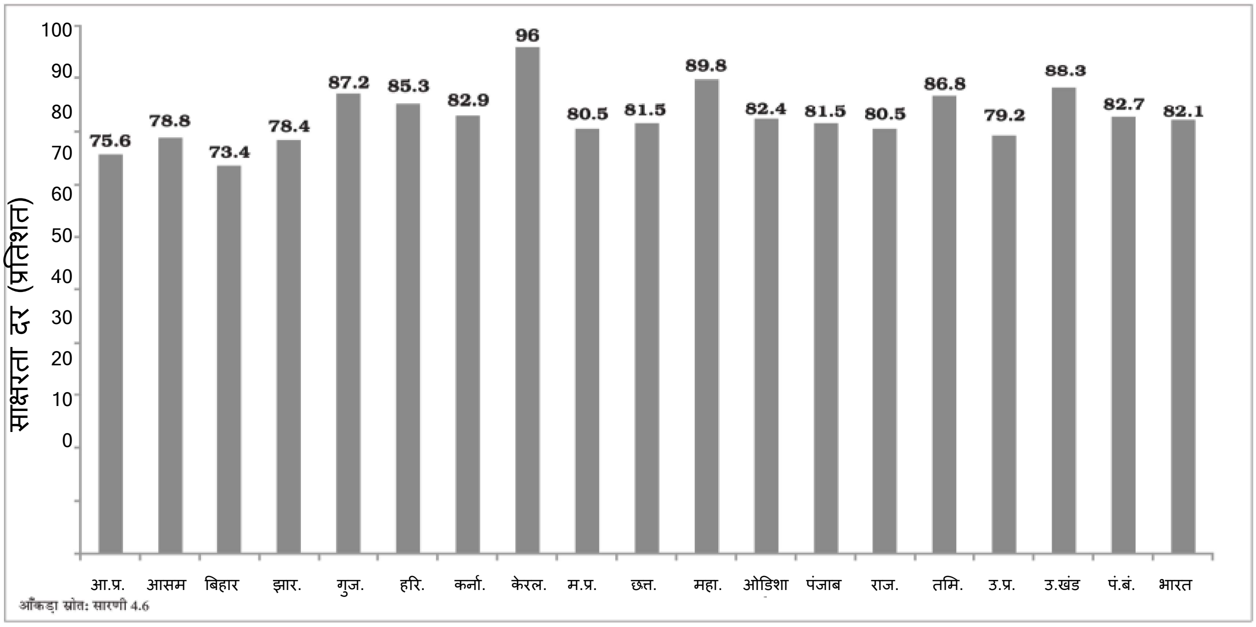
विभिन्न प्रकार के आँकड़ों के लिए भिन्न-भिन्न प्रकार के आरेखी प्रस्तुतीकरण की आवश्यकता हो सकती है। दंड-आरेख बारंबारता एवं गैर-बारंबारता दोनों प्रकार के चरों एवं गुणों के लिए उपयुक्त होते हैं। विविक्त चर जैसे, परिवार के आकार, पाँसे पर बिंदु, परीक्षा में प्राप्त ग्रेड आदि और लिंग, धर्म, जाति, देश इत्यादि गुण दंड-आरेख के द्वारा प्रस्तुत किए जा सकते हैं। दंड-आरेख गैर-बारंबारता आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए अधिक सुविधाजनक होते हैं, जैसे कई वर्षों के लिए आय-व्यय लेखा, आयात/निर्यात आदि।

जिस वर्ग का दंड अधिक लंबा है (जैसे केरल में साक्षरता) वह किसी दूसरे वर्ग (पं. बंगाल की

सारणी 4.6

भारत के प्रमुख राज्यों में साक्षरता दर

	2001		2011	
भारत के प्रमुख राज्य	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री
आंध्र प्रदेश (आ.प्र.)	70.3	50.4	75.6	59.7
आसाम (आसा.)	71.3	54.6	78.8	67.3
बिहार (बि.)	59.7	33.1	73.4	53.3
झारखंड (झार.)	67.3	38.9	78.4	56.2
गुजरात (गुज.)	79.7	57.8	87.2	70.7
हरियाणा (हरि.)	78.5	55.7	85.3	66.8
कर्नाटक (कर्ना.)	76.1	56.9	82.9	68.1
केरल (के.)	94.2	87.7	96.0	92.0
मध्य प्रदेश (म.प्र.)	76.1	50.3	80.5	60.0
छत्तीसगढ़ (छत्त.)	77.4	51.9	81.5	60.6
महाराष्ट्र (महा.)	86.0	67.0	89.8	75.5
ओडिशा (ओडी.)	75.3	50.5	82.4	64.4
पंजाब (पंजा.)	75.2	63.4	81.5	71.3
राजस्थान (राज.)	75.7	43.9	80.5	52.7
तमिलनाडु (तमिण)	82.4	64.4	86.8	73.9
उत्तर प्रदेश (उ.प्र.)	68.8	42.2	79.2	59.3
उत्तराखंड (उत्त.)	83.3	59.6	88.3	70.7
पश्चिम बंगाल (प.बं.)	77.0	59.6	82.7	71.2
भारत	**75.3**	**53.7**	**82.1**	**65.5**



चित्र 4.1 2011 में भारत के प्रमुख राज्यों की साक्षरता दर (पुरुष) को दिखाता हुआ दंड-आरेख।

साक्षरता) की अपेक्षा विशेषता की अधिक माप दिखाता है। दंडों का प्रयोग (जिन्हें स्तंभ भी कहते हैं) सामान्यतः काल-श्रेणी के आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण के लिए किया जाता है (1980-2000 के बीच अन्न उत्पादन, कार्य सहभागिता दर में एक दशक में उतार चढ़ाव, कई वर्षों के दौरान पंजीकृत बेरोजगारी, साक्षरता दर आदि), (चित्र 4.2)।

दंड-आरेख के कई रूप हो सकते हैं, जैसे कि बहु दंड-आरेख तथा घटक दंड-आरेख।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

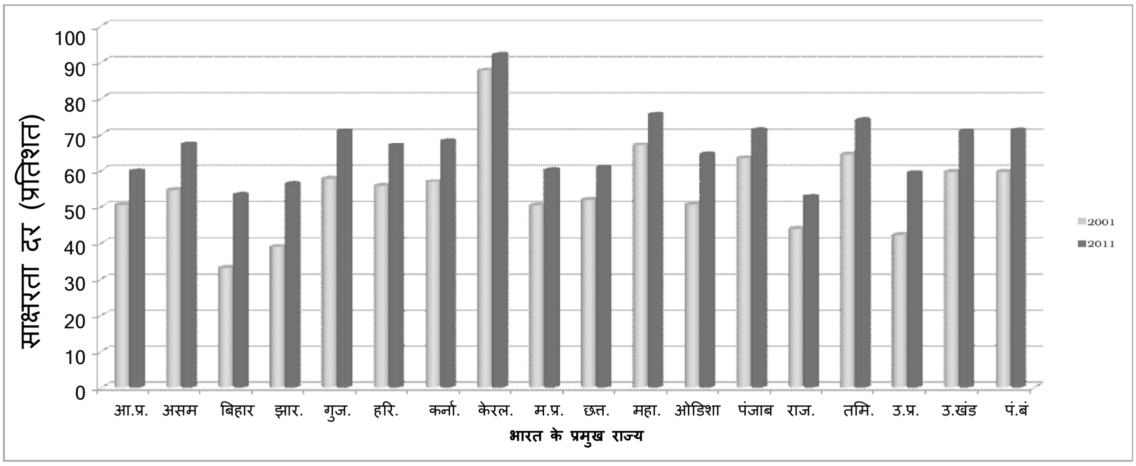
- सन् 2011 में भारत के (प्रमुख राज्यों में से) कितने राज्यों में महिलाओं की साक्षरता दर औसत साक्षरता दर से अधिक थी?
- क्या 1991 और 2011 के लगातार दो जनगणना वर्षों में, इन राज्यों में अधिकतम एवं न्यूनतम महिला साक्षरता दर के अंतर में कमी आई है?

बहु दंड-आरेख (Multiple Bar Diagram)

बहु दंड-आरेखों का प्रयोग (चित्र 4.2) दो या अधिक आँकड़ा-समुच्चयों की तुलना के लिए किया जाता है, उदाहरण के लिए विभिन्न वर्षों में आय और व्यय या आयात और निर्यात या विभिन्न विषयों एवं विभिन्न कक्षाओं में प्राप्त किए गए अंक आदि।

घटक दंड-आरेख (Component Bar Diagram)

घटक दंड आरेख (चित्र 4.3) या चार्ट (जिन्हें उप-आरेख भी कहा जाता है) का प्रयोग विभिन्न घटकों (ऐसे तत्व या भाग जिनसे वस्तु का निर्माण होता है) के आकारों की तुलना करने के लिए तथा इन घटकों तथा उनके अभिन्न अंगों के संबंधों पर प्रकाश डालने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए विभिन्न उत्पादों की बिक्री से प्राप्त धन, किसी प्ररूपी भारतीय परिवार के व्यय की मदें (जैसे खान-पान, किराया, दवा, शिक्षा, बिजली आदि घटक), आय और व्यय के लिए बजट परिव्यय, जनसंख्या, श्रमशक्ति के घटक आदि। घटक दंड-आरेखों को सामान्यतः उपयुक्त छायाओं या रंगों से भरा जाता है।



चित्र 4.2 दंड-आरेख दो जनगणना वर्षों 2001-2011 के दौरान भारत के प्रमुख राज्यों में महिला साक्षरता दर को दिखा रहा है।

अर्थ निर्वचनः चित्र 4.2 के द्वारा आसानी के साथ यह पता किया जा सकता है कि पूरे देश में पिछले कई वर्षों में महिला साक्षरता की दर में वृद्धि हुई है। ठीक इसी प्रकार से कई अर्थ निकाले जा सकते हैं। जैसे यह आरेख दर्शाता है कि बिहार, झारखंड तथा उत्तर प्रदेश में महिला साक्षरता दर में सर्वाधिक वृद्धि हुई है।

सारणी 4.7

बिहार के एक जिले में 4-6 वर्ष की आयु के बच्चों का लिंग के अनुसार विद्यालय में नामांकन (प्रतिशत)

लिंग	नामांकित (प्रतिशत)	गैर नामांकित (प्रतिशत)
लड़के	91.5	8.5
लड़कियाँ	58.6	41.4
कुल	78.0	22.0

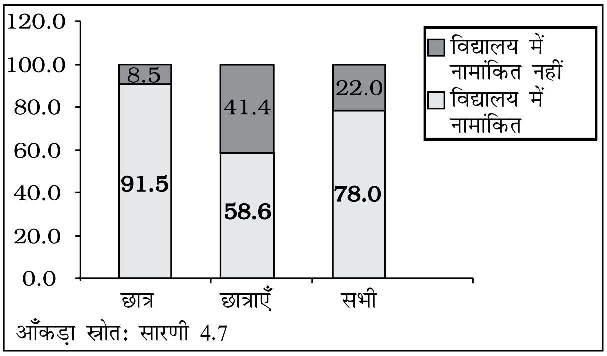
आँकड़ा स्रोतः अप्रकाशित आँकड़े

किसी घटक दंड-आरेख के अंतर्गत दो या दो से अधिक घटकों को दंडों और उसके उपभागों के द्वारा प्रकट किया जाता है। उदाहरण के लिए, दंड के द्वारा 6-14 आयु-वर्ग के सभी बच्चों की जनसंख्या को प्रदर्शित कर सकते हैं। ये घटक नामांकित और गैर-नामांकित बच्चों का अनुपात दर्शाते हैं। घटक दंड-आरेख के अंतर्गत लड़के, लड़कियों तथा आयु विशेष के बच्चों के कुल योग को भिन्न-भिन्न घटक-दंडों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है, जैसा चित्र 4.3 में दिखाया गया है। घटक दंड-आरेख बनाने के लिए, सबसे पहले X-अक्ष पर एक दंड बनाया जाता है, जिसकी कुल ऊँचाई आँकड़ों के कुल मान के बराबर होती है (प्रतिशत आँकड़ों के लिए दंड की ऊँचाई 100 इकाइयों के बराबर होगी, देखें चित्र 4.3) अन्यथा दंड की ऊँचाई दंड के कुल मान के बराबर बनायी जाती है तथा घटकों की आनुपातिक ऊँचाई ऐकिक विधि के द्वारा निर्धारित की जाती है। दंड को विभाजित करने के क्रम में छोटे घटकों को अधिक प्राथमिकता दी जाती है।

वृत्त आरेख (Pie Diagram)

वृत्त आरेख भी एक घटक आरेख है, पर घटक दंड-आरेखों के स्थान पर इसे एक ऐसे वृत्त द्वारा प्रस्तुत किया जाता है, जिसके क्षेत्र को आनुपातिक रूप से उन घटकों में विभाजित किया जाता है, जिन्हें यह दर्शाता है (चित्र 4.4)।

इसे वृत्त चार्ट भी कहते हैं। यहाँ पर वृत्त को केंद्र से परिधि की ओर सीधी रेखाओं के द्वारा उतने ही भागों में विभाजित किया जाता है जितनी घटकों की संख्या होती है।



चित्र 4.3 बिहार के एक जिले में प्राथमिक स्तर पर नामांकन (बहुखंड दंड-आरेख)

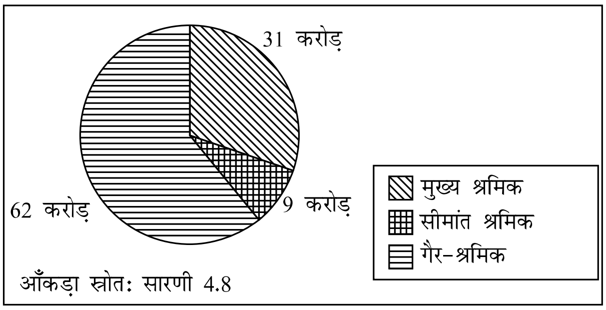
सामान्यतः वृत्त चार्टों को किसी वर्ग विशेष के निरपेक्ष मान के आधार पर नहीं बनाया जाता। यहाँ पर सबसे पहले प्रत्येक वर्ग के मान को वर्गों के कुल मान के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। वृत्त आरेख में वृत्त को 100 बराबर भागों में बाँट लिया जाता है, जिसमें प्रत्येक अंश 3.6°(360°/100) के बराबर होता है, चाहे त्रिज्या का मान कुछ भी हो। कोण को जानने के लिए घटक को वृत्त के केंद्र से कक्षांतरित करना होगा, जिसमें प्रत्येक घटक के प्रतिशत अंकों को 3.6° से गुणा करना होगा। घटकों के प्रतिशतों के वृत्त के कोणीय घटकों के रूप में परिवर्तन का एक उदाहरण सारणी 4.8 में प्रदर्शित किया गया है।

यह जानना रोचक हो सकता है कि दंड-आरेख द्वारा प्रस्तुत किए गए आँकड़े भी अच्छी तरह वृत्त चार्ट द्वारा दिखाए जा सकते हैं। यहाँ पर केवल इसकी आवश्यकता होती है कि वृत्त आरेख बनाने से पहले घटकों के निरपेक्ष मान को प्रतिशत में बदलना होता है।

सारणी 4.8

कार्य-स्थिति के अनुसार भारत की जनसंख्या का वितरण (करोड़ में)

स्थिति घटक	जनसंख्या	प्रतिशत	कोणीय
सीमांत श्रमिक	9	8.8	32°
मुख्य श्रमिक	31	30.4	109°
गैर श्रमिक	62	60.8	219°
कुल	102	100.0	360°



चित्र 4.4 सन् 2001 में कार्य की स्थिति के अनुसार विभिन्न श्रेणियों के लिए भारत की जनसंख्या का वृत्त आरेख।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- चित्र 4.4 में प्रस्तुत आँकड़ों को दंड-आरेख द्वारा प्रस्तुत कीजिए?
- क्या वृत्त आरेख द्वारा प्रस्तुत किए जाने वाले आँकड़ों के कुल मान का वृत्तखंड के क्षेत्रफल से कोई संबंध होता है?

बारंबारता आरेख (Frequency Diagram)

समूहीकृत बारंबारता वितरण के रूप में प्रस्तुत आँकड़ों को सामान्यतः बारंबारता आरेखों के द्वारा प्रस्तुत किया जाता है, जैसे कि आयत चित्र, बारंबारता बहुभुज बारंबारता वक्र तथा ओजाइव आदि।

आयत चित्र (Histogram)

आयत चित्र एक द्विविम आरेख है। यह आयतों का एक ऐसा समुच्चय है, जिसमें वर्ग सीमाओं के अंतराल (x - अक्ष पर) आधार का कार्य करते हैं तथा जिनके क्षेत्रफल वर्ग बारंबारता के अनुपात में होते हैं (चित्र 4.5)। यदि वर्ग के अंतराल का विस्तार एक समान हो जैसा कि सामान्यतः होता है तो आयतों का क्षेत्रफल उनकी बारंबारताओं के अनुपात में होता है। हालाँकि कई प्रकार के आँकड़ों में विभिन्न विस्तार वाले अंतरालों का उपयोग सुविधाजनक होता है तथा कई बार आवश्यक भी हो जाता है। उदाहरण के लिए, आयु के अनुसार मृत्यु का सारणीयन करते समय आरंभ में, जब अधिक आयु वर्ग की जनसंख्या की तुलना में कम आयु वालों की मृत्युदर काफी ऊँची हो तो संक्षिप्त आयु-अंतराल (जैसे कि 0, 1, 2 वर्ष / 0, 7, 28... दिवस आदि), अधिक सार्थक और उपयोगी होंगे। इस प्रकार के आँकड़ों के आलेखी निरूपण में किसी आयत के क्षेत्रफल की ऊँचाई, इसकी ऊँचाई (यहाँ बारंबारता) तथा आधार (यहाँ पर वर्ग अंतराल का विस्तार) का भागफल है। जब अंतराल समान हों, अर्थात् जब सभी आयतों का आधार सामान हों, तब तुलना के उद्देश्य से क्षेत्रफल को किसी भी अंतराल की बारंबारता के द्वारा आसानी से प्रस्तुत किया जा सकता है। जब आधारों का विस्तार भिन्न-भिन्न होता है, तब आयतों की ऊँचाई को समायोजित किया जाता है, ताकि तुलनात्मक मापों को प्राप्त किया जा सके। इस प्रकार की स्थिति में निरपेक्ष बारंबारता के स्थान पर बारंबारता घनत्व (जिसमें वर्ग बारंबारता का विभाजन वर्ग अंतराल के विस्तार से होता है) अधिक सार्थक होगा।

चूँकि आयत चित्र आयताकार होते हैं, वर्ग अंतराल की बारंबारता (या बारंबारता घनत्व) के बराबर ऊर्ध्वाधर दूरी पर आधार रेखा पर उसी परिमाण की एक समांतर रेखा खींची जाती है। आयत चित्र कभी

सारणी 4.9

किसी कस्बे के एक इलाके में दैनिक म.जदूरी का वितरण

दैनिक म.जदूरी (रु)	म.जदूरों की संख्या (बारंबारता)
45-49	2
50-54	3
55-59	5
60-64	3
65-69	6
70-74	7
75-79	12
80-84	13
85-89	9
90-94	7
95-99	6
100-104	4
105-109	2
110-114	3
115-119	3

स्रोतः अप्रकाशित आँकड़े

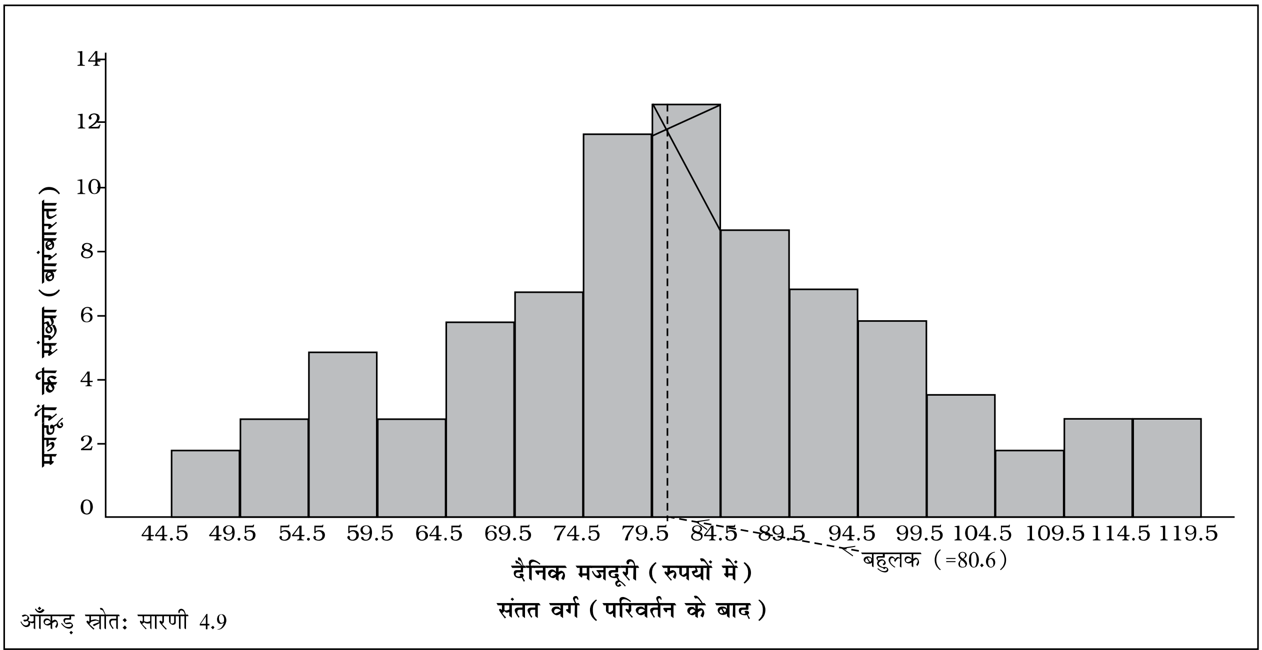
विविक्त चर आँकड़ों के लिए नहीं खींचा जाता है। चूँकि, सतत चरों के लिए वर्ग अंतराल की निचली सीमा पूर्व अंतराल की ऊँची सीमा के साथ मिल जाती है (भले ही वह समान हो या असमान), अतः सभी आयत साथ-साथ होते हैं और दो आसन्न आयतों के बीच कोई खाली स्थान नहीं होता। यदि वर्ग संतत नहीं होते हैं तो पहले उन्हें संतत वर्गों में बदला जाता है, जैसा कि अध्याय 3 में बताया जा चुका है। कई बार दो आसन्न आयतों के बीच के समान अंश को हटा दिया जाता है, ताकि संततता का बेहतर प्रभाव पड़े। इसके परिणामस्वरूप जो आकृति बनती है वह दोहरे सोपान की तरह लगती है।

आयत चित्र दंड-आरेख के समान दिखता है। परन्तु, इनके बीच समानताओं से कहीं अधिक भिन्नताएँ हैं, जिसका पता पहली बार में नहीं

चलता। स्तंभों का क्षेत्रफल, अंतराल तथा चौड़ाई सभी यादृच्छिक होते हैं। स्तंभों की ऊँचाई महत्वपूर्ण है, न कि इनकी चौड़ाई या क्षेत्रफल। एक ऊर्ध्वाधर रेखा भी ठीक उसी उद्देश्य को पूरा कर सकती है जितना कि उसी चौड़ाई का एक दंड करता है। इसके अतिरिक्त आयत चित्र में दो आयतों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं छोड़ा जाता है, जबकि दंड-आरेख में दो क्रमिक दंडों के बीच कुछ रिक्त स्थान अवश्य छोड़ा जाता है (बहुदंड आरेख या घटक-दंड आरेखों को छोड़कर)। यद्यपि सभी दंडों की चौड़ाई समान होती है तथापि तुलना की दृष्टि से इनकी चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता है। आयत चित्र में चौड़ाई उतनी ही महत्वपूर्ण है जितनी ऊँचाई। दंड-आरेख विविक्त एवं संतत दोनों ही चरों के लिए बनाये जा सकते हैं, जबकि आयत चित्र केवल संतत चर के लिए ही बनाए जाते हैं। आयत चित्र बारंबारता वितरण के बहुलक के मान को भी आलेखी रूप में दिखा सकता है, जैसा चित्र 4.5 में दिखाया गया है तथा ग-निर्देशांक पर बिंदुओं से बनी क्षैतिज रेखा बहुलक को दर्शाती है।

बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygon)

बारंबारता बहुभुज सीधी रेखाओं से घिरा हुआ एक समतल है, जिसमें सामान्यतः चार या अधिक रेखाएँ होती हैं। बारंबारता बहुभुज आयत चित्र का विकल्प होता है, जो आयत चित्र से ही व्युतपन्न होता है। बारंबारता बहुभुज को वक्र के आकार के अध्ययन के लिए किसी आयत चित्र के ऊपर लगाया जा सकता है। आयत चित्र के क्रमिक आयतों के ऊपरी छोर के मध्य बिंदुओं को जोड़ कर बारंबारता बहुभुज का निर्माण बहुत आसानी से किया जा सकता है। आवृत्ति बहुभुज आधार रेखा से दूर दो छोरों पर समाप्त हो जाता है, जिससे वक्र के अंतर्गत आनेवाले क्षेत्रफल का परिकलन संभव नहीं होता। इसका समाधान आधार रेखा से दोनों वर्गों के मध्यमानों को वितरण के प्रत्येक छोर पर शून्य बारंबारता से मिलाकर किया जाता है। आधार के दोनों छोरों को खंडित रेखाओं या बिंदु रेखाओं द्वारा जोड़ा जा सकता है। अतः वक्र का कुल क्षेत्रफल, आयत चित्र के



चित्र 4.5 एक कस्बे के एक स्थानिक क्षेत्र के 85 दैनिक मजदूरों के वितरण के लिए आयत चित्र।

क्षेत्रफल की भाँति, कुल बारंबारता या प्रतिदर्श के आकार का प्रतिनिधित्व करता है।

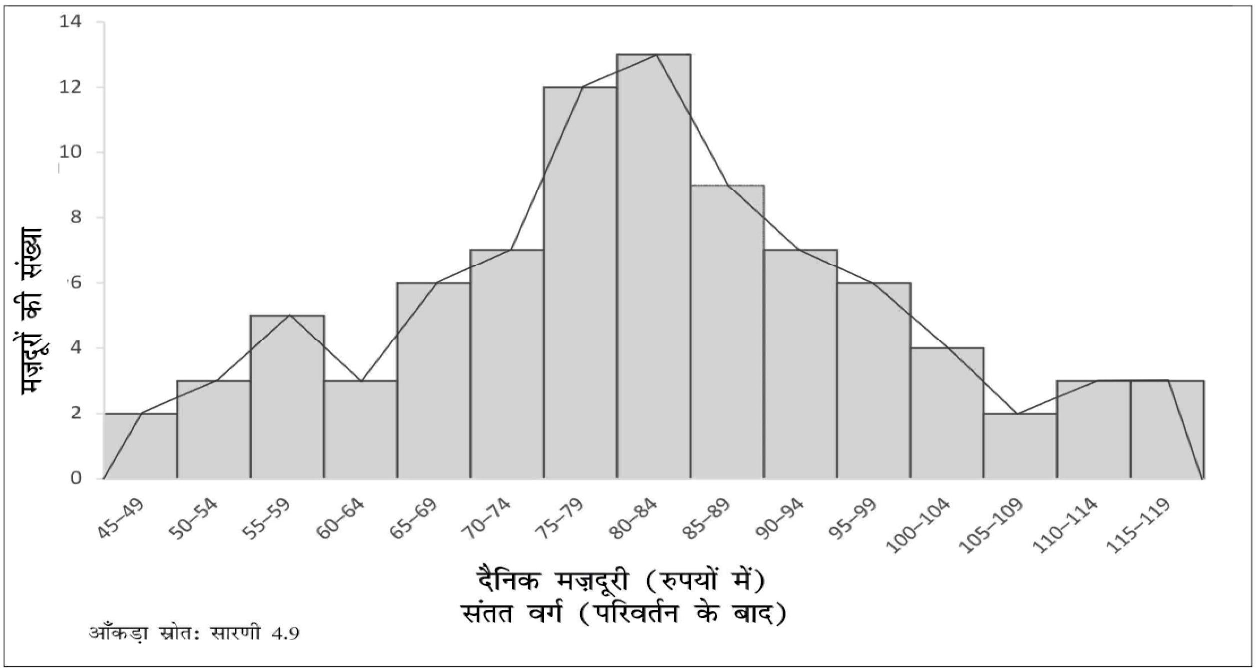
बारंबारता बहुभुज समूहित बारंबारता वितरण के प्रस्तुतीकरण के लिए सर्वाधिक प्रचलित विधि है। वर्ग सीमाएँ तथा वर्ग-चिह्न, दोनों को x-अक्ष पर प्रदर्शित किया जा सकता है तथा दो क्रमिक वर्ग-चिह्नों के बीच की दूरी वर्ग अंतराल की चौड़ाई के आनुपातिक/समान होती है। आँकड़ों का आलेखन तब आसान होता है जब वर्ग चिह्न ग्राफ पेपर की मोटी रेखाओं के ऊपर आपतित (पड़ते) होते हैं। इससे कोई अंतर नहीं पड़ता है कि वर्ग सीमाओं या वर्ग चिह्नों का प्रयोग x-अक्ष पर किया गया है या नहीं, बारंबारताएँ (निर्देशांकों के रूप में) सदैव वर्ग-अंतराल के मध्यबिंदु पर आलेखित होती हैं। जब आलेख पर सभी बिंदु आलेखित हो जाते हैं, तो इन्हें क्रमिक सरल रेखाओं के द्वारा सावधानी से आपस में जोड़ दिया जाता है। खंडित रेखाएँ दो अंतरालों के बीच मध्य बिंदु को जोड़ती हैं, एक शुरू में और दूसरी अंत में, जो आलेखित वक्र के दो छोर होते हैं (चित्र 4.6)। जब एक ही अक्ष पर दो या दो से अधिक आलेखित वितरणों की तुलना की जाती है, तो बारंबारता बहुभुज संभवतः अधिक उपयोगी होता है, क्योंकि आयत-चित्र में दो या दो से अधिक वितरणों की ऊर्ध्वाधर रेखाएँ एवं क्षैतिज रेखाएँ आपस में मिल सकती हैं।

बारंबारता वक्र (Frequency Curve)

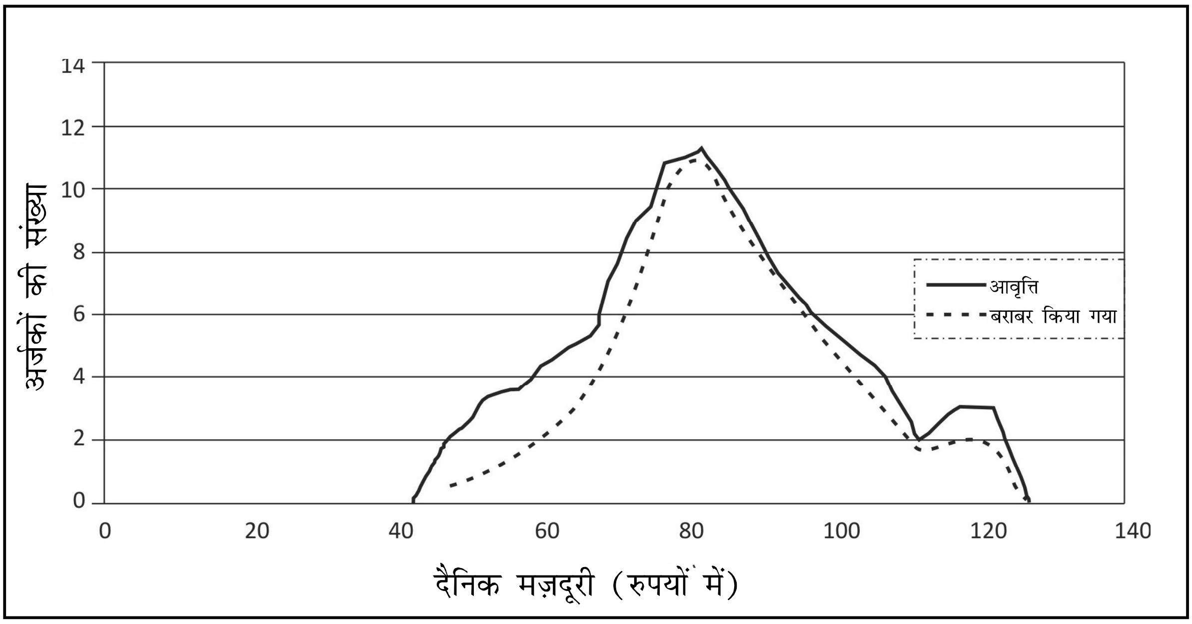
बारंबारता वक्र को, बारंबारता बहुभुज के बिंदुओं से निकटतम गुजरते हुए मुक्त-हस्त से वक्र बनाकर आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। यह आवश्यक नहीं है कि यह बारंबारता बहुभुज के सभी बिंदुओं से होकर गुजरे, परंतु यह उन बिंदुओं से निकटतम होकर गुजरता है (चित्र 4.7)।

तोरण (Ogive)

तोरण को संचयी बारंबारता वक्र के नाम से भी जाना जाता है। क्योंकि संचयी बारंबारताएँ दो



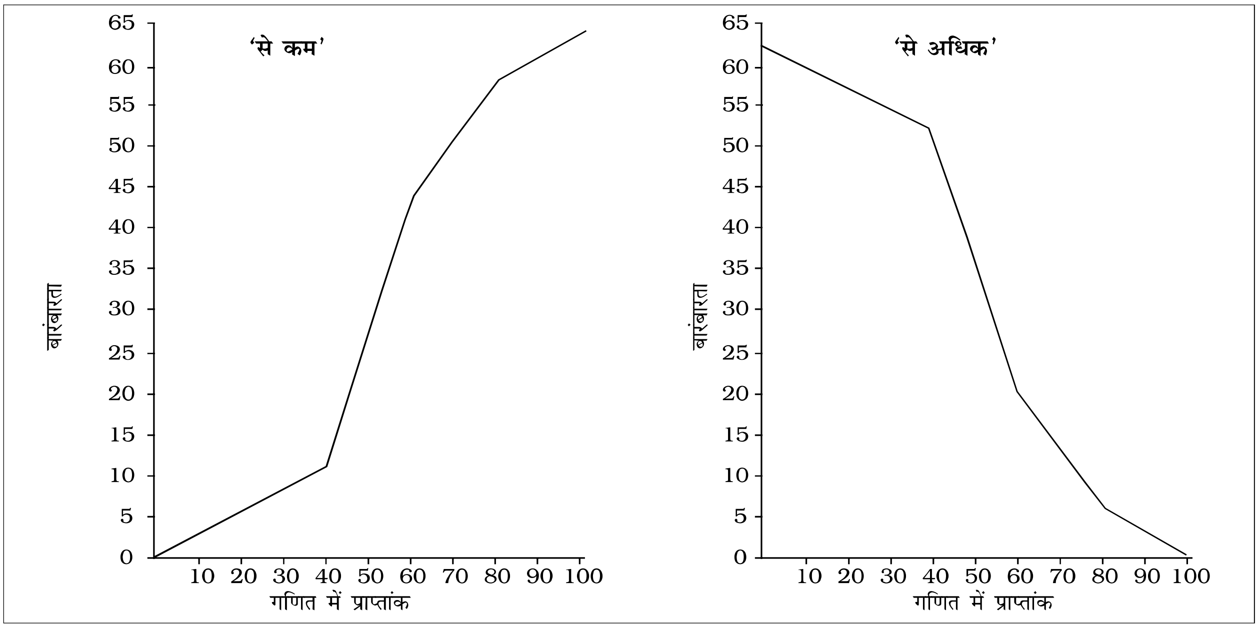
चित्र 4.6 सारणी 4.9 में दिए गए आँकड़ों के लिए बारंबारता बहुभुज का रेखांकन।



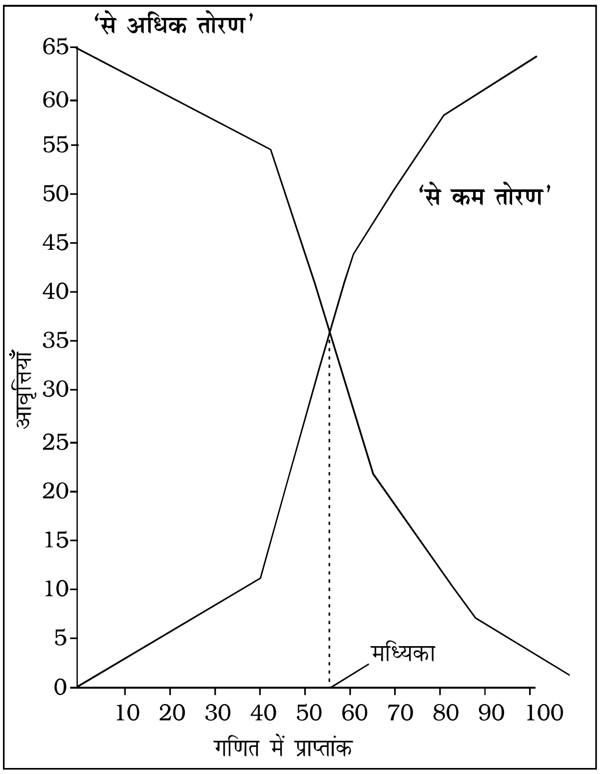
चित्र 4.7 सारणी 4.9 के लिए बारंबारता वक्र

सारणी 4.10
गणित में प्राप्त अंकों का बारंबारता वितरण

सारणी 4.10 (क)		**सारणी 4.10 (ख)**		**सारणी 4.10 (ग)**	
गणित में प्राप्त अंकों का बारंबारता वितरण		गणित में प्राप्त अंकों का 'से कम' संचयी बारंबारता		गणित में प्रा प्त अंकों का 'से अधिक' संचयी बारंबारता	
अंक	छात्रों की संख्या	अंक	छात्रों की संख्या	अंक	छात्रों की संख्या
0-20	6	20 से कम	6	0 से अधिक	64
20-40	5	40 से कम	11	20 से अधिक	58
40-60	33	60 से कम	44	40 से अधिक	53
60-80	14	80 से कम	58	60 से अधिक	20
80-100	6	100 से कम	64	80 से अधिक	6
योग	**64**				



आकृति 4.8 (अ) सारणी 4.10 में दिए गए आँकड़ों के लिए 'से कम' और 'से अधिक' तोरण।



आकृति 4.8 (ब) सारणी 4.10 के लिए 'से कम' तथा 'से अधिक' तोरण।

प्रकार की होती हैं, उदाहरण के लिए, 'से कम' प्रकार एवं 'से अधिक' प्रकार की। तदनुसार, किसी समूहित बारंबारता वितरण आँकड़ों के लिए दो प्रकार के तोरण भी होते हैं। यहाँ, बारंबारता बहुभुज की भाँति साधारण बारंबारताओं के स्थान पर बारंबारता वितरण की वर्ग-सीमाओं के सामने संचयी बारंबारताओं को Y-अक्ष पर आलेखित किया जाता है। संचयी बारंबारताओं को 'से कम' तोरण के लिए क्रमशः वर्ग अंतरालों की ऊपरी सीमा के सामने आलेखित किया जाता है, जबकि 'से कम' तोरण के लिए क्रमशः वर्ग अंतरालों की निम्नतम सीमा के सामने आलेखित किया जाता है। इन दोनों ही तोरणों की एक रोचक विशेषता यह है कि इन का परस्पर प्रतिच्छेद बिंदु बारंबारता वितरण की मध्यिका (आकृति 4.8 ब) बनाता है। जैसा कि दोनों तोरणों के आकार से स्पष्ट होता है, 'से कम' प्रकार का तोरण कभी घटता नहीं है और 'से अधिक' प्रकार का तोरण कभी बढ़ता नहीं है।

अंकगणितीय रेखा चित्र (Arithmetic Line Graph)

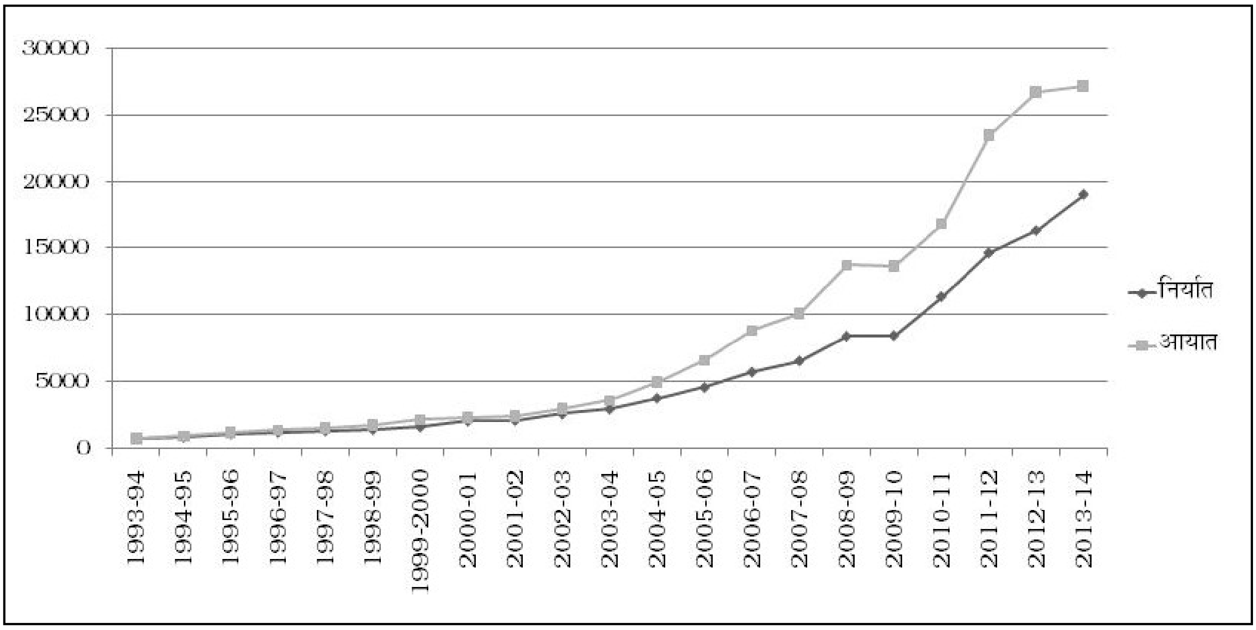
अंकगणितीय रेखा चित्र को काल श्रेणी आलेख भी कहा जाता है। इस आलेख के अंतर्गत समय (घंटा, दिन/तारीख, सप्ताह/माह, वर्ष इत्यादि) को x–अक्ष पर आलेखित किया जाता है और चरों के मानों (काल-श्रेणी आँकड़ों) को y–अक्ष पर आलेखित किया जाता है। इन आलेखित बिंदुओं को जोड़ने से प्राप्त रेखा-चित्र अंकगणितीय रेखा-चित्र (काल-श्रेणी आलेख) कहलाता है। यह लंबी अवधि के काल-श्रेणी आँकड़ों की प्रवृत्ति और आवर्तिता इत्यादि को समझने में सहायक होता है।

क्रियात्मक गतिविधि

- क्या तोरण वितरण के उन विभागकारी मानों की जानकारी देने में सहायक हो सकता है, जिन्हें यह प्रदर्शित करता है?

सारणी 4.11
भारत के निर्यात एवं आयात के मान
(100 करोड़ रु में)

वर्ष	निर्यात	आयात
1993-94	698	731
1994-95	827	900
1995-96	1064	1227
1996-97	1188	1389
1997-98	1301	1542
1998-99	1398	1783
1999-2000	1591	2155
2000-01	2036	2309
2001-02	2090	2452
2002-03	2549	2964
2003-04	2934	3591
2004-05	3753	5011
2005-06	4564	6604
2006-07	5718	8815
2007-08	6559	10123
2008-09	8408	13744
2009-10	8455	13637
2010-11	11370	16835
2011-12	14660	23455
2012-13	16343	26692
2013-14	19050	27154



चित्र 4.9 सारणी 4.11 में दिए गए कालश्रेणी आँकड़ों का अंकगणितीय रेखा चित्र।

यहाँ आप आरेख 4.9 में देख सकते हैं कि यद्यपि वर्ष 1993-94 से 2013-14 के बीच सभी वर्षों में निर्यात की अपेक्षा आयात अधिक थे। आप देख सकते हैं कि 2001-02 के बाद आयात और निर्यात दोनों के मानों में लगातार वृद्धि हुई है तथा 2001-02 के बाद दोनों (निर्यात व आयात) के बीच का अंतर बढ़ गया।

6. **सारांश**

अब तक आपने समझ लिया होगा कि आँकड़ों को विभिन्न रूपों में किस प्रकार प्रस्तुत किया जाए जैसे, पाठ-विषयक, सारणीबद्ध तथा रेखीय रूप में। साथ ही आप संगृहीत आँकड़ों की प्रस्तुति के लिए उपयुक्त विधि तथा आरेख के प्रकार का चुनाव भी कर सकेंगे। इस तरह से आप आँकड़ों को अर्थपूर्ण, बोधगम्य तथा उद्देश्यपूर्ण तरीके से प्रस्तुत कर सकते हैं।

पुनरावर्तन

- आँकड़े (परिमाण में अधिक होने पर भी) उचित प्रस्तुति द्वारा अर्थ प्रकट करते हैं।
- आँकड़े छोटे (मात्रा में) हों तो पाठ-विषयक प्रस्तुति बेहतर रहती है।
- भारी मात्रा वाले आँकड़ों के लिए सारणीबद्ध प्रस्तुतीकरण सहायक होता है। इससे आँकड़ों की किसी भी मात्रा को, एक या अधिक चरों की दृष्टि से, समंजित किया जाता है।
- सारणीबद्ध आँकड़ों को आरेख के माध्यम से भी प्रस्तुत किया जा सकता है जो, अन्य माध्यमों की अपेक्षा, उन्हें अधिक बोधगम्य बनाता है।

अभ्यास

निम्नलिखित 1 से 10 तक के प्रश्नों के सही उत्तर चुनें:

1. दंड-आरेख
   (क) एक विमी आरेख है
   (ख) द्विविम आरेख है
   (ग) विम रहित आरेख है
   (घ) इनमें से कोई नहीं है
2. आयत चित्र के माध्यम से प्रस्तुत किए गए आँकड़ों से आलेखी रूप से निम्नलिखित जानकारी प्राप्त कर सकते हैं:
   (क) माध्य
   (ख) बहुलक
   (ग) माँध्यिका
   (घ) उपर्युक्त सभी

3. तोरणों के द्वारा आलेखी रूप में निम्न की स्थिति जानी जा सकती हैः
   (क) बहुलक
   (ख) माध्य
   (ग) मध्यिका
   (घ) उपर्युक्त कोई भी नहीं

4. अंकगणितीय रेखा चित्र के द्वारा प्रस्तुत आँकड़ों से निम्न को समझने में मदद मिलती हैः
   (क) दीर्घकालिक प्रवृत्ति
   (ख) आँकड़ों में चक्रीयता
   (ग) आँकड़ों में कालिकता
   (घ) उपर्युक्त सभी

5. निम्नलिखित कथनों में से सही या गलत बताएँ :
   (i) दंड-आरेख के दंडों की चौड़ाई का एक समान होना जरूरी नहीं है।
   (ii) आयत चित्र में आयतों की चौड़ाई अवश्य एक समान होनी चाहिए
   (iii) दंड आयत चित्र में आयतों की चौड़ाई अवश्य एक समान होनी चाहिए
   (iv) आयत चित्र की रचना केवल आँकड़ों के संतत वर्गीकरण के लिए की जा सकती है
   (v) आयत चित्र एवं स्तंभ आरेख आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए एक जैसी विधियाँ है
   (vi) आयत चित्र की मदद से बारंबारता वितरण के बहुलक को आलेखी रूप में जाना जा सकता है
   (vii) तोरणों से बारंबारता वितरण की मध्यिका को नहीं जाना जा सकता है

6. निम्नलिखित को प्रस्तुत करने के लिए किस प्रकार का आरेख अधिक प्रभावी होता है?
   (क) वर्ष-विशेष की मासिक वर्षा
   (ख) धर्म के अनुसार दिल्ली की जनसंख्या का संघटन
   (ग) एक कारखाने में लागत-घटक

7. मान लीजिए, आप भारत में शहरी गैर-कामगारों की संख्या में वृद्धि तथा भारत में शहरीकरण के निम्न स्तर पर बल देना चाहते हैं, जैसा कि उदाहरण 4.2 में दिखाया गया है, तो आप उसका सारणीयन कैसे करेंगे?

8. यदि किसी बारंबारता सारणी में समान वर्ग अंतरालों की तुलना में वर्ग अंतराल असमान हों, तो आयत-चित्र बनाने की प्रक्रिया किस प्रकार भिन्न होगी।

9. भारतीय चीनी कारखाना संघ की रिपोर्ट में कहा गया है कि दिसंबर 2001 के पहले पखवाड़े के दौरान 3,87,7000 टन चीनी का उत्पादन हुआ, जबकि ठीक इसी अवधि में पिछले वर्ष (2000 में) 3,78,7000 टन चीनी का उत्पादन हुआ था। दिसम्बर 2001 में घरेलू खपत के लिए चीनी मिलों से 2,83,000 टन चीनी उठाई गई और 41,000 टन चीनी निर्यात के लिए थी, जबकि पिछले वर्ष की इसी अवधि में घरेलू खपत की मात्रा 1,54,000 टन थी और निर्यात शून्य था।
   (क) उपर्युक्त आँकड़ों को सारणीबद्ध रूप में प्रस्तुत करें।
   (ख) मान लीजिए, आप इस आँकड़े को आरेख के रूप में प्रस्तुत करना चाहते हैं तो आप कौन सा आरेख चुनेंगे और क्यों?
   (ग)) इन आँकड़ों को आरेखी रूप में प्रस्तुत करें।

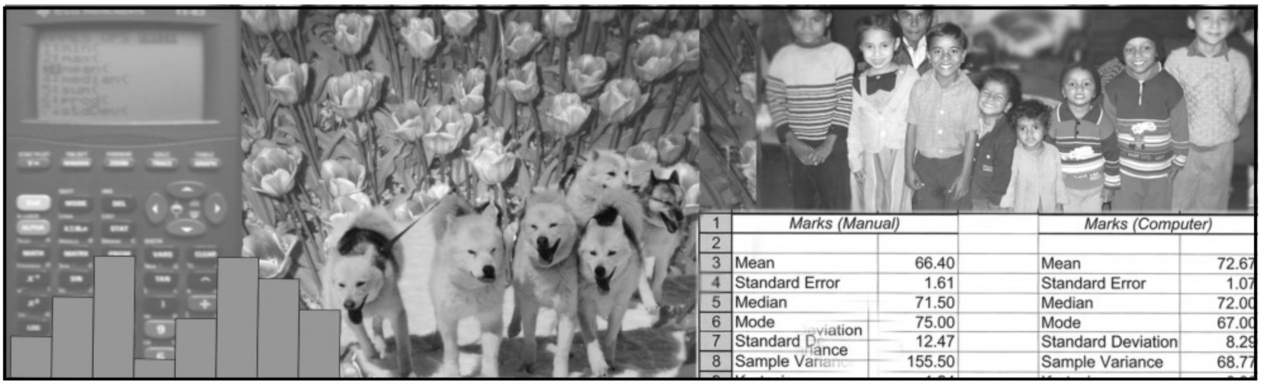
10. निम्नलिखित सारणी में कारक लागत पर सकल घरेलू उत्पाद में क्षेत्रकवार अनुमानित वास्तविक संवृद्धि दर को (पिछले वर्ष से प्रतिशत परिवर्तन) प्रस्तुत किया गया हैः

वर्ष	कृषि एवं सम्बद्ध क्षेत्रक	उद्योग	सेवाएँ
1994-95	5.0	9.2	7.0
1995-96	-0.9	11.8	10.3
1996-97	9.6	6.0	7.1
1997-98	-1.9	5.9	9.0
1998-99	7.2	4.0	8.3
1999-2000	0.8	6.9	8.2

उपर्युक्त आँकड़ों को बहु काल-श्रेणी आरेख द्वारा प्रस्तुत करें।

अध्याय 5

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप



इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे किः

- किसी एक संख्या द्वारा आँकड़ों के समुच्चय को संक्षिप्त करने की आवश्यकता समझ सकें;
- विभिन्न प्रकार के औसतों को समझकर इनके बीच अंतर कर सकें;
- विभिन्न प्रकार के औसतों का अभिकलन सीख सकें;
- आँकड़ों के किसी समुच्चय से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकाल सकें;
- इसका निर्णय ले सकें कि स्थिति विशेष में कौन-सा औसत सर्वाधिक उपयोगी होगा।

1. प्रस्तावना

पिछले अध्याय में, आप आँकड़ों के सारणीबद्ध एवं आलेखी प्रस्तुतीकरण के बारे में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में, आप केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों के बारे में अध्ययन करेंगे, जो आँकड़ों की संक्षिप्त रूप में व्याख्या करने की संख्यात्मक विधि है। दैनिक जीवन में आप आँकड़ों के विशाल समुच्चय के संक्षेपण के उदाहरण देख सकते हैं, जैसे किसी कक्षा में छात्रों द्वारा किसी परीक्षा में प्राप्त किए गए औसत अंक, क्षेत्र विशेष की औसत वर्षा, किसी कारखाने में औसत उत्पादन, किसी फर्म में काम करने वाले या किसी स्थान विशेष में रहने वाले लोगों की औसत आय आदि।

बैजू एक किसान है। वह बिहार के बक्सर जिले के बालापुर गाँव में अपने खेत में खाद्यान्न का उत्पादन करता है। उस गाँव में 50 छोटे कृषक हैं। बैजू के पास एक एकड़ भूमि है। आप बालापुर के किसानों की आर्थिक स्थिति जानने में रुचि रखते हैं। आप बालापुर गाँव में बैजू की आर्थिक स्थिति की तुलना करना चाहते हैं। इसके लिए आपको बालापुर गाँव के दूसरे किसानों की जोतों के आकार के साथ बैजू की जोत के आकार का तुलनात्मक मूल्यांकन करना होगा। आप यह

जानना चाहेंगे कि क्या बैजू की भूमि -

1. सामान्य अर्थ में औसत से ऊपर है (देखें नीचे दिया गया माध्य)
2. आधे किसानों की जोतों के आकार से अधिक है (देखें नीचे दी गई मध्यिका)
3. अधिकतर किसानों की जोत से अधिक है (देखें नीचे दिया गया बहुलक)

बैजू की तुलनात्मक आर्थिक स्थिति के मूल्यांकन के लिए, आपको बालापुर गाँव के सभी किसानों की जोतों के आँकड़ों के संपूर्ण समुच्चय का संक्षेपण करना होगा। इसे केंद्रीय प्रवृत्ति के माप द्वारा किया जा सकता है, जो आँकड़ों का संक्षेपण किसी एकल मान में इस प्रकार करता है कि यह एकल मान संपूर्ण आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करे। केंद्रीय प्रवृत्ति की माप प्रतिनिधि या विशिष्ट मान के रूप में आँकड़ों के संक्षेपण का एक तरीका है।

केंद्रीय प्रवृत्ति या औसतों के कई सांख्यिकीय माप हैं। तीन सर्वाधिक प्रचलित औसत निम्नलिखित हैं-

- समांतर माध्य
- मध्यिका
- बहुलक

आपको यह भी ध्यान रखना चाहिए कि दो अन्य प्रकार के औसत और भी हैं, जैसे ज्यामितीय माध्य तथा हरात्मक माध्य, जो विशिष्ट परिस्थितियों में उपयुक्त होते हैं। लेकिन वर्तमान परिचर्चा उपर्युक्त तीन प्रकार के औसतों तक ही सीमित रहेगी।

2. समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

मान लीजिए 6 परिवारों की मासिक आय (रु में) निम्नलिखित हैः

1600, 1500, 1400, 1525, 1625, 1630.

यहाँ पर परिवारों की औसत आय प्राप्त करने के लिए आय को एक साथ जोड़कर, उसे परिवारों की संख्या से विभाजित किया गया है।

$$= \frac{1600+1500+1400+1525+1625+1630}{6}$$

= 1,547 रु

इससे पता चलता है कि औसतन एक परिवार 1,547 रु अर्जित करता है।

समांतर माध्य केंद्रीय प्रवृत्ति का सबसे अधिक प्रयोग किया जाने वाला माप है। समांतर माध्य को, सभी प्रेक्षणों के मूल्यों के योग को उनकी कुल संख्याओं से विभाजन के रूप में परिभाषित किया जाता है और सामान्यतः $\overline{X}$ से निर्देशित किया जाता है। यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$, आदि N प्रेक्षण हैं, तो समांतर माध्य इस प्रकार प्राप्त होगाः

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+\ldots+X_N}{N}$$

दाँए पक्ष को इस प्रकार लिखा जा सकता है $=\frac{\sum_{i=1}^{N} X}{N}$

यहाँ i एक सूचक है जो क्रमबद्ध रूप से मान 1, 2, 3, ..., N धारण करता है। सुविधा के लिए, इसे सूचक i के बिना सरल रूप में लिखा जाएगा। अतः $\overline{X}=\frac{\sum X}{N}$, जहाँ, $\sum X$ =सभी मानों का योग तथा

N = मानों की संख्या।

समांतर माध्य का परिकलन कैसे किया जाता है

समांतर माध्य के परिकलन का अध्ययन मोटे तौर पर दो श्रेणियों के अंतर्गत किया जा सकता है -

1. असमूहित आँकड़ों का समांतर माध्य
2. समूहित आँकड़ों का समांतर माध्य

असमूहित आँकड़ों की शृंखला के लिए समांतर माध्य

प्रत्यक्ष विधि

प्रत्यक्ष विधि के द्वारा समांतर माध्य निकालने के लिए किसी शृंखला के सभी प्रेक्षणों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्याओं से विभाजित किया जाता है।

उदाहरण 1

किसी कक्षा के छात्रों के अर्थशास्त्र की परीक्षा में प्राप्तांक प्रदर्शित करने वाले आँकड़ों से समांतर माध्य का परिकलन करें: 40, 50, 55, 78, 58,

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$$= \frac{40+50+55+78+58}{5} = 56.2$$

अर्थशास्त्र की परीक्षा में छात्रों के औसत अंक 56.2 हैं।

कल्पित माध्य विधि

यदि आँकड़ों में प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो तथा संख्याएँ भी बड़ी हों, तो प्रत्यक्ष विधि द्वारा समांतर मान को अभिकलित करना कठिन हो जाता है। अतः अभिकलन को कल्पित माध्य विधि के प्रयोग द्वारा सरल बनाया जा सकता है।

ऐसे आँकड़ा-समुच्चयों में जिनमें बड़ी संख्या में प्रेक्षणों के साथ-साथ बड़े संख्यात्मक अंक भी हों, परिकलन में समय बचाने के लिए आप कल्पित माध्य विधि का प्रयोग कर सकते हैं। यहां पर आप तर्क/अनुभव के आधार पर एक विशिष्ट अंक को समांतर माध्य मान लेते हैं। इसके बाद आप प्रत्येक प्रेक्षण का इस कल्पित माध्य से विचलन ले सकते हैं। इसके बाद आप इन विचलनों के संकलन को आँकड़ों के प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित कर सकते हैं। विचलनों के जोड़ तथा प्रेक्षणों की संख्या के अनुपात को, कल्पित माध्य में जोड़कर, वास्तविक समांतर माध्य का अनुमान लगाया जा सकता है। प्रतीकात्मक रूप में,

A = कल्पित माध्य

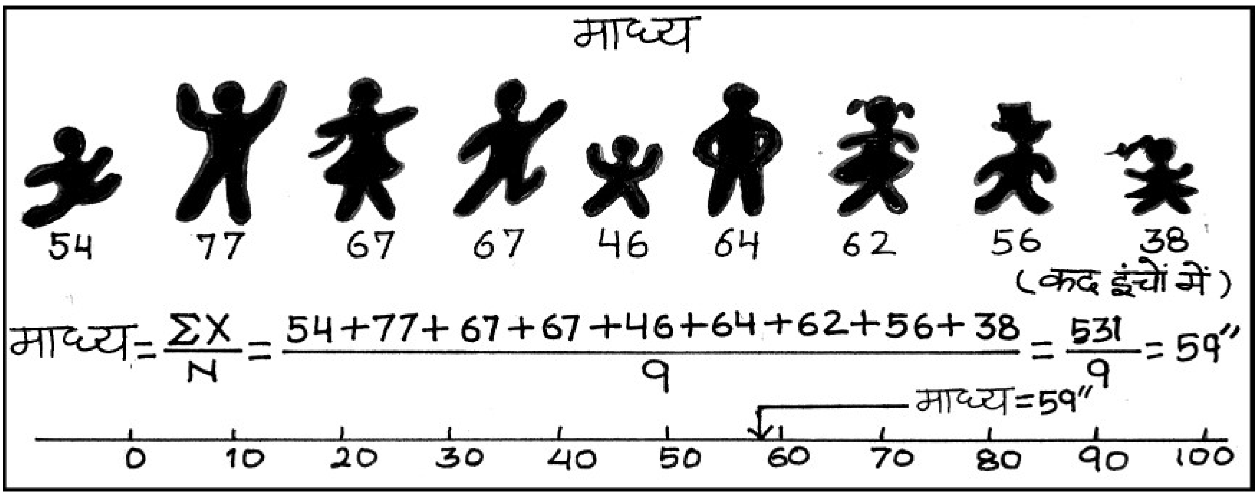
X = व्यष्टिगत प्रेक्षण

N = प्रेक्षणों की कुल संख्या

d = व्यष्टिगत प्रेक्षणों से कल्पित माध्य का विचलन अर्थात् $d = X - A$.

इसके बाद, सभी विचलनों को जोड़ लें, जैसे $\Sigma d = \Sigma(X - A)$

इसके बाद $\frac{\Sigma d}{N}$ निकालें।



इसके बाद A तथा $\frac{\Sigma d}{N}$ को जोड़कर $\overline{X}$ प्राप्त करें।

इसके बाद $\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$

ध्यान रहे कि किसी भी मान को, चाहे वह आँकड़ों में विद्यमान हो या नहीं, कल्पित माध्य के रूप में लिया जा सकता है। फिर भी, परिकलन को सरल बनाने के लिए आँकड़ों में केंद्रीय रूप में अवस्थित मान को कल्पित माध्य के लिए चुना जा सकता है।

उदाहरण 2

निम्नलिखित आँकड़े 10 परिवारों की साप्ताहिक आय दिखाते हैः

परिवार

क ख ग घ ङ

च छ ज झ ञ

साप्ताहिक आय (रु में)

850 700 100 750 5000 80 420 2500 400 360

परिवारों की माध्य आय का आकलन करें।

सारणी 5.1

कल्पित माध्य विधि द्वारा समांतर माध्य का अभिकलन

परिवार	आय (X)	d=X-850 = X-A	d' =(X-850)/10
क	850	0	0
ख	700	-150	-15
ग	100	-750	-75
घ	750	-100	-10
ड़	5000	+4150	+415
च	80	-770	-77
छ	420	-430	-43
ज	2500	+1650	+165
झ	400	-450	-45
ञ	360	-490	-49
	11160	+2660	+266

कल्पित माध्य विधि के प्रयोग द्वारा समांतर माध्य

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 850 + (2,660)/10$$

= 1,116 रु।

अतः दोनों ही विधियों से उस परिवार की औसत साप्ताहिक आय 1,116 रु है। इसे आप प्रत्यक्ष विधि के प्रयोग द्वारा भी जाँच सकते हैं।

पद विचलन विधि

कल्पित माध्य से लिए गए सभी विचलनों को समापवर्तक 'c' से विभाजित करके और भी सरल बनाया जा सकता है। इसका उद्देश्य बड़ी संख्याओं से बचना है। उदाहरण के लिए, यदि $d = X - A$ का मान बहुत बड़ा है, तब d' को ज्ञात करें। इसे निम्नलिखित विधि से किया जा सकता हैः

$$d' = \frac{d}{c} = \frac{X - A}{C}.$$

इसका सूत्र नीचे दिया गया हैः

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d'}{N} \times c$$

c = समापवर्तक, N = कुल प्रेक्षणों की संख्या, A = कल्पित माध्य।

इस प्रकार, आप पद विचलन विधि द्वारा, उदाहरण 2 में दिए गए समांतर माध्य का परिकलन कर सकते हैं।

$\overline{X}$ = 850 + (266)/10 × 10 = 1,116 रु

समूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य का परिकलन

विविक्त शृंखला

प्रत्यक्ष विधि

यदि शृंखला विविक्त है, तो प्रत्येक प्रेक्षण की बारंबारता को प्रेक्षण के मान के द्वारा गुणा किया जाता है। इससे जो मान प्राप्त होते हैं, उन्हें जोड़ा

जाता है और बारंबारताओं की कुल संख्या के द्वारा विभाजित किया जाता है। प्रतीक के रूप में,

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$$

यहाँ पर ΣfX = चरों के उत्पाद तथा बारंबारताओं का योग।

Σf = बारंबारताओं का योग

उदाहरण 3

एक आवासीय कॉलोनी में भूखंड केवल तीन आकारों में मिलते हैं: 100 वर्ग मीटर, 200 वर्ग मीटर एवं 300 वर्ग मीटर तथा भूखण्डों की संख्या क्रमशः 200, 50 एवं 10 है।

सारणी 5.2

प्रत्यक्ष विधि द्वारा समांतर मान का अभिकलन

भूखंड का आकार (वर्ग मीटर)(x)	भूखंडों की संख्या (f)	fX	$d' = \frac{X-200}{100}$	fd'
100	200	20000	-1	-200
200	50	10000	0	0
300	10	3000	+1	10
	260	33000	0	-190

प्रत्यक्ष विधि के प्रयोग द्वारा समांतर माध्य,

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{33000}{260} = 126.92 \text{ वर्ग मीटर}$$

अतः आवासीय कॉलोनी का औसत भूखण्ड आकार 126.92 वर्ग मीटर है।

कल्पित माध्य विधि

जैसा पहले बताया जा चुका है व्यष्टि शृंखला में, कल्पित माध्य विधि के प्रयोग द्वारा परिकलन को थोड़ा संशोधित करके सरल बनाया जा सकता है। चूँकि यहाँ प्रत्येक मद की बारंबारता (f) दी गयी है, अतः fd को ज्ञात करने हेतु हम प्रत्येक विचलन (d) को बारंबारता से गुणा करते हैं। इससे हमें Σfd मिलता है। अगला चरण सभी बारंबारताओं का योग करके Σf प्राप्त करना है। इसके बाद $\Sigma fd/\Sigma f$ ज्ञात करें। अंत में समांतर माध्य के परिकलन $\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ के द्वारा कल्पित माध्य विधि का प्रयोग कर किया जाता है।

पद विचलन विधि

इसमें विचलनों को समापवर्तक 'c' द्वारा विभाजित किया जाता हैं, जो कि परिकलन को सरल बना देता हैं। यहां संख्यात्मक अंकों के आकार को घटा कर परिकलन को सरल बनाने के लिए $d' = \frac{d}{c} = \frac{X - A}{C}$ का आकलन किया जाता है। इसके बाद fd' तथा $\Sigma fd'$ प्राप्त करें। अंत में, पद विचलन विधि का सूत्र नीचे दिया गया है:

$$\overline{X} = A + \frac{fd'}{f} \times c$$

क्रियात्मक गतिविधि

- पद विचलन तथा कल्पित माध्य विधि का प्रयोग करते हुए उदाहरण 3 में दिए गए आँकड़ों के लिए जोत का माध्य आकार ज्ञात करें।

संतत शृंखला

यहाँ वर्ग अंतराल दिए गए हैं। संतत शृंखला में भी समांतर माध्य परिकलन की प्रक्रिया ठीक वैसी ही है, जैसी विविक्त शृंखला में थी। इसमें अंतर केवल इतना है कि भिन्न वर्ग अंतरालों के मध्य बिंदु लेने पड़ते हैं। आप स्वतः जानते हैं कि वर्ग अंतराल, अपवर्जी या समावेशी या असमान आकार वाले हो सकते हैं। अपवर्जी अंतराल के उदाहरण

हैं, 0-10, 10-20 आदि। समावेशी अंतराल के उदाहरण हैं 0-9, 10-19 आदि। असमान वर्ग अंतराल के उदाहरण हैं, 0-20, 20-50 आदि। इन सभी स्थितियों में, समांतर माध्य का परिकलन एक ही तरीके से होता है।

उदाहरण 4

निम्नलिखित छात्रों के औसत प्राप्तांकों का परिकलन (क) प्रत्यक्ष विधि (ख) पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए कीजिए।

प्रत्यक्ष विधि

प्राप्तांक

0-10 10-20 20-30 30-40

40-50 50-60 60-70

छात्रों की संख्या

5 12 15 25 8

3 2

सारणी 5.3

प्रत्यक्ष विधि द्वारा अपवर्जी वर्ग अंतराल के लिए औसत प्राप्तांकों का अभिकलन

प्राप्तांक (x)	छात्रों की संख्या (f)	मध्य बिंदु (m)	fm (2)×(3)	d'=(m-35)/10	fd'
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0-10	5	5	25	-3	-15
10-20	12	15	180	-2	-24
20-30	15	25	375	-1	-15
30-40	25	35	875	0	0
40-50	8	45	360	1	8
50-60	3	55	165	2	6
60-70	2	65	130	3	6
	70		2110		-34

चरणः

1. प्रत्येक वर्ग के लिए मध्यमान प्राप्त करें, जिसे m द्वारा दर्शाया जाता है।
2. Σfm निकालें और प्रत्यक्ष विधि सूत्र का प्रयोग करें।

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} = \frac{2110}{70} = 30.14 \text{ अंक}$$

पद विचलन विधि

1. $d' = \frac{m-A}{c}$ निकालें
2. A = 35 लें (कोई स्वैच्छिक संख्या), c = समापवर्तक

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times c = 35 + \frac{(-34)}{70} \times 10$$

= 30.14 अंक

समांतर माध्य की दो रोचक विशेषताएँ

1. समांतर माध्य से मदों के विचलन का योग सदा शून्य के बराबर होता है। प्रतीकात्मक रूप से, $\sum(X-\bar{X})=0$
2. औसत माध्य चरम मूल्यों द्वारा प्रभावित होता है।
   कोई भी चरम मूल्य, किसी भी तरफ, औसत माध्य को ऊपर या नीचे धकेल सकता है।

भारित समांतर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

समांतर माध्य के परिकलन में कभी-कभी विभिन्न मदों के लिए, उनके महत्व के अनुसार, भार निर्धारित करना महत्वपूर्ण होता है। उदाहरण के लिए, दो खाद्य पदार्थ आम और आलू हैं। आप आम तथा आलू की औसत कीमतें (क्रमशः p_1 तथा p_2) जानना चाहते हैं। इनका समांतर माध्य

$\frac{p_1 + p_2}{2}$ होगा। हो सकता है आप आलू की कीमत (p_2) में वृद्धि को अधिक महत्व देना चाहते हों। ऐसा करने के लिए, आप उपभोक्ता के बजट में आमों के भाग को भार (W_1) के तौर पर प्रयोग कर सकते हैं तथा बजट में आलू के भाग को भार (W_2) के तौर पर। अब बजट में भाग के द्वारा भारित समांतर माध्य $\frac{W_1P_1+W_2P_2}{W_1+W_2}$ होगा।

सामान्यतः भारित समांतर माध्य

$$\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$ के द्वारा

प्राप्त किया जाता है।

जब कीमतों में वृद्धि होती है, तब आप शायद उन वस्तुओं की कीमतों की वृद्धि में रुचि रख सकते हैं। जो आपके लिए अधिक महत्वपूर्ण हों। आप इसके बारे में, अध्याय 8 में सूचकांकों की चर्चा में अधिक विस्तार से पढ़ेंगे।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- निम्नलिखित उदाहरण से समांतर माध्य की उपर्युक्त विशेषता की जाँच करें:
  X: 4 6 8 10 12
- उपर्युक्त उदाहरण में, यदि माध्य के मूल्य में 2 की वृद्धि की जाय, तब व्यष्टिगत प्रेक्षणों में क्या परिवर्तन होता है?
- यदि पहले तीन मदों में 2 की वृद्धि होती है, तब बाद के दो मदों का मान क्या होना चाहिए, ताकि माध्य पूर्ववत् बना रहे।
- यदि मान 12 के स्थान पर 96 का प्रयोग करें, तब समांतर माध्य क्या होगा? टिप्पणी करें।

3. मध्यिका (Median)

मध्यिका उस चर का स्थितिक मान है जो वितरण को दो समान भागों में बाँट देता है। एक भाग के अंतर्गत सभी मान मध्यिका मान से अधिक या उसके बराबर होते हैं तथा दूसरे भाग के सभी मान उससे कम या उसके बराबर होते हैं। जब आँकड़ों के समुच्चय को उनके परिमाण के क्रम में व्यवस्थित किया जाए, तो मध्यवर्ती मान मध्यिका होता है। क्योंकि मध्यिका का निर्धारण विभिन्न मानों की स्थिति या स्थान द्वारा होता है, यह अधिकतम मूल्य वाले मान में होने वाली वृद्धि से अप्रभावित रहता है।

मध्यिका का अभिकलन

आँकड़ों को क्रमशः सबसे छोटे से सबसे बड़े की ओर व्यवस्थित करते हुए मध्यिका को मध्य मान द्वारा आसानी से अभिकलित किया जा सकता है।

उदाहरण 5

मान लीजिए, एक आँकड़ा समुच्चय में निम्नलिखित प्रेक्षण हैं: 5, 7, 6, 1, 8, 10, 12, 4, और 3. आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हुए आप पाते हैं:

1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12.

यहाँ पर 'मध्य अंक' 6 है। अतः मध्यिका भी 6 है। इसमें आधे अंक 6 से अधिक हैं और आधे 6 से कम।

यदि आँकड़ों में सम संख्याएँ होती हैं, तब दो प्रेक्षण होंगे, जो मध्य में होंगे। ऐसी स्थिति में मध्यिका को इन दो मध्य मानों के समांतर माध्य द्वारा अभिकलित किया जाता है।

उदाहरण 6

निम्नलिखित आँकड़ों में 20 छात्रों के प्राप्तांक दिए गए है। मध्यिका का परिकलन करें:

25, 72, 28, 65, 29, 60, 30, 54, 32, 53, 33, 52, 35, 51, 42, 48, 45, 47, 46, 33.

आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर आप पाते हैं

25, 28, 29, 30, 32, 33, 33, 35, 42, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 60, 65, 72.

यहाँ पर आप देख सकते हैं कि मध्य भाग में दो प्रेक्षण 45 और 46 हैं। इन दो प्रेक्षणों का समांतर माध्य निकालकर मध्यिका को प्राप्त किया जा सकता हैः

मध्यिका = $\frac{45+46}{2} = 45.5$ अंक

मध्यिका को परिकलित करने के लिए मध्य इकाई/इकाइयों की अवस्थिति को जान लेना महत्त्वपूर्ण है, जिस पर मध्यिका निर्भर होती है। मध्यिका की अवस्थिति को निम्नलिखित सूत्र के द्वारा परिकलित किया जा सकता हैः

मध्यिका की अवस्थिति = $\frac{(N+1)}{2}$ वें मद का आकार

जहाँ, N = मदों की संख्या।

आप यह देख सकते हैं कि उपर्युक्त सूत्र आपको मध्यिका की अवस्थिति एक क्रमबद्ध सारणी के रूप में देता है, न कि मध्यिका को ही। मध्यिका इस सूत्र द्वारा अभिकलित की जाती हैः

मध्यिका = $\frac{(N+1)}{2}$ वें मद का आकार

विविक्त या असंतत शृंखला

विविक्त शृंखला में मध्यिका की अवस्थिति अर्थात् $(N+1)/2$ वीं इकाई को संचयी बारंबारता के माध्यम से प्राप्त किया जा सकता है। इस अवस्थिति पर संगत मान ही मध्यिका का मान होता है।

उदाहरण 7

नीचे व्यक्तियों की संख्याएँ तथा उनकी आय (रु में) का बारंबारता वितरण दिया गया है। मध्यिका आय का परिकलन कीजिए।

आय (रु में):	10	20	30	40
व्यक्तियों की संख्याः	2	4	10	4

मध्यिका आय को परिकलित करने के लिये, आप निम्नानुसार बारंबारता-वितरण तैयार कर सकते हैं।

सारणी 5.4
विविक्त शृंखला के लिए मध्यिका का अभिकलन

आय (रु में)	लोगों की संख्या(f)	संचयी बारंबारता(cf)
10	2	2
20	4	6
30	10	16
40	4	20

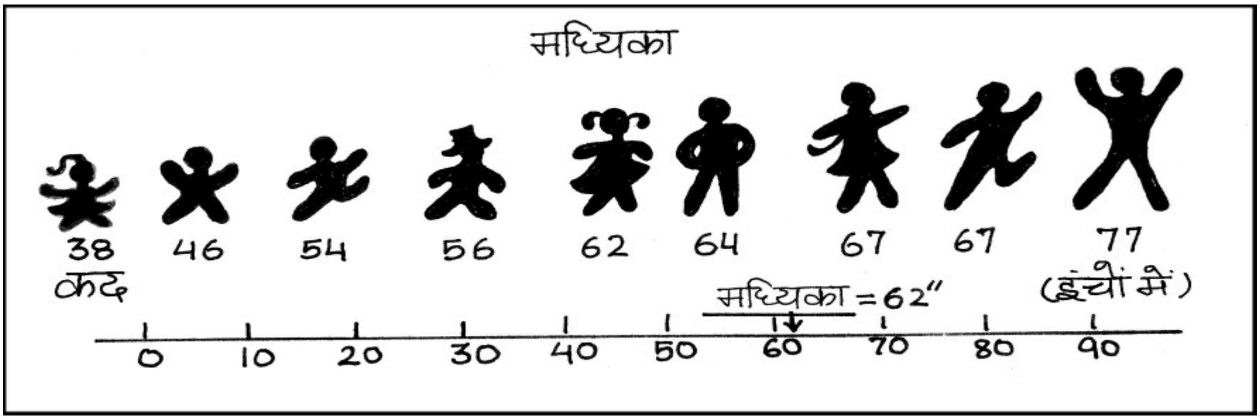
मध्यिका $(N+1)/2$ = (20+1)/2 = 10.5वें प्रेक्षण में अवस्थित है। इसे आसानी पूर्वक संचयी बारंबारता के माध्यम से ढूंढ़ा जा सकता है। 10.5वाँ प्रेक्षण, 16वीं संचयी बारंबारता में निहित है। इससे संगत आय 30 रु है। अतः मध्यिका आय 30 रु है।

संतत शृंखला

संतत शृंखला में आपको वह मध्य-वर्ग वहाँ ढूँढ़ना है, जहाँ $N/2$वाँ मद [न कि $(N+1)/2$वाँ मद] निहित है। तब मध्यिका को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता हैः

मध्यिका = $L + \frac{(N/2 - c.f.)}{f} \times h$

यहाँ पर, L = मध्यिका वर्ग की निम्न सीमा,
$c.f.$ = मध्यिका वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी बारंबारता,
f = मध्यवर्ग की बारंबारता,
h = मध्यिका वर्ग के अंतराल का परिमाण



उस दशा में किसी समायोजन की आवश्यकता नहीं है, जब बारंबारता का आकार या परिमाण असमान हो।

उदाहरण 8

निम्नलिखित आँकड़े किसी कारखाने में कार्यरत लोगों की दैनिक मजदूरी से संबद्ध हैं। मध्यिका दैनिक मजदूरी का अभिकलन कीजिए।

दैनिक मजदूरी (रु में)
55-60 50-55 45-50 40-45 35-40
30-35 25-30 20-25
मजदूरों की संख्या
7 13 15 20 30 33
28 14

यहाँ पर आँकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित हैं।

उपर्युक्त चित्र में, मध्यिका (N/2)वें मद (अर्थात् 160/2) = शृंखला के 80वें मद का मान है, जो 35-40 वर्ग-अंतराल में स्थित है। मध्यिका के सूत्र का प्रयोग करने परः

$$\text{मध्यिका} = L + \frac{(N/2 - c.f.)}{f} \times h$$

$$= \frac{35+(80-75)}{30} \times (40-35)$$

$$= 35.83 \text{ रु}$$

सारणी 5.5

संतत शृंखला के लिए मध्यिका का अभिकलन

दैनिक मजदूरी (रु में)	मजदूरों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता (f)
20-25	14	14
25-30	28	42
30-35	33	75
35-40	30	105
40-45	20	125
45-50	15	140
50-55	13	153
55-60	7	160

अतः मध्यिका दैनिक मजदूरी 35.83 रु है। इसका अर्थ है कि 50 प्रतिशत मजदूर 35.83 रुपये से कम या इसके बराबर मजदूरी प्राप्त करते हैं और 50 प्रतिशत मजदूर इससे अधिक या इसके बराबर मजदूरी प्राप्त करते हैं।

आपको यह ध्यान रखना चाहिए कि केंद्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में मध्यिका शृंखला के सभी मानों के प्रति संवेदी नहीं होता है। यह आँकड़ों के केंद्रीय मदों के मान पर संकेंद्रित होता है।

क्रियात्मक गविविधि

- श्रेणह के सभी चारों मूल्यों के लिए माध्य एवं मध्यिका ज्ञात करें। आप क्या देखते हैं?

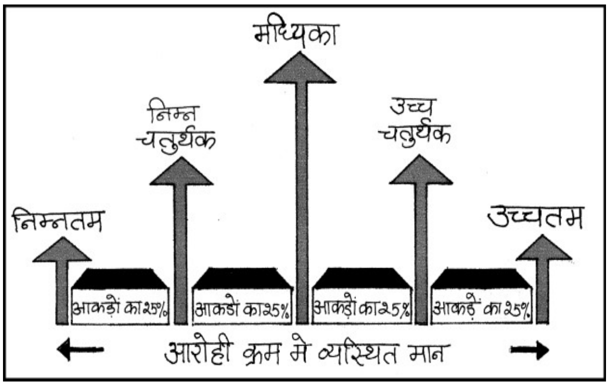
सारणी 5.6
विभिन्न शृंखलाओं के समांतर माध्य एवं मध्यिका

शृंखलाएँ	x(चर के मान)	माध्य	मध्यिका
क	1, 2, 3	?	?
ख	1, 2, 30	?	?
ग	1, 2, 300	?	?
घ	1, 2, 3000	?	?

- क्या मध्यिका चरम मूल्यों द्वारा प्रभावित होती है? चरम मूल्य क्या हैं?
- क्या मध्यिका, माध्य की अपेक्षा एक बेहतर प्रणाली है?

चतुर्थक (Quartiles)

चतुर्थक वे माप हैं, जो आँकड़ों को चार बराबर भागों में विभाजित करते हैं और प्रत्येक भाग में बराबर संख्या में प्रेक्षण दिए होते हैं। अतः यहाँ पर तीन चतुर्थक प्रचलित हैं। प्रथम चतुर्थक या निम्न चतुर्थक (Q_1 द्वारा निर्देशित) में वितरण के 25 प्रतिशत मद इससे कम होते हैं और 75 प्रतिशत मद इससे अधिक होते हैं। द्वितीय चतुर्थक या मध्यिका (Q_2 द्वारा निर्देशित) में 50 प्रतिशत मद इसके नीचे होते है और 50 प्रतिशत मद इसके ऊपर होते हैं। तृतीय चतुर्थक या उच्च चतुर्थक (Q_3 द्वारा निर्देशित) में विवरण के 75 प्रतिशत मद इसके नीचे होते हैं और 25 प्रतिशत मद इसके ऊपर होते हैं। अतः Q_1 एवं Q_3 दो सीमाएँ हैं जिनके बीच केन्द्रीय 50 प्रतिशत आँकड़े निहित होते हैं।



शतमक (Percentile)

शतमक वितरण को 100 बराबर भागों में विभाजित करता है। इस प्रकार आपको 99 विभाजक स्थितियाँ प्राप्त होती हैं, जिन्हें $P_1, P_2, P_3, ..., P_{99}$ द्वारा दर्शाया जाता है। इसमें P_{50} मध्यिका मान होता है। यदि आप एक प्रबंधन-प्रवेश परीक्षा में 82 शतमक प्राप्त करते हैं, तो इसका अर्थ है कि कुल परीक्षार्थियों से आपका स्थान 18 प्रतिशत नीचे था। यदि इस परीक्षा में कुल एक लाख परीक्षार्थी बैठते हैं तो बताएँ आपकी स्थिति कहाँ है?

चतुर्थकों का परिकलन

चतुर्थक की अवस्थिति ज्ञात करने की विधि ठीक वैसी ही है जैसी कि व्यष्टिगत एवं विविक्त शृंखलाओं में मध्यिका की थी। किसी क्रमबद्ध शृंखला में Q_1 एवं Q_3 के मान निम्नलिखित सूत्र (सिद्धांत) से प्राप्त किए जा सकते हैं, जिसमें N प्रेक्षणों की कुल संख्या है और

$Q_1 = \dfrac{(N+1)}{4}$ वें मद का आकार और

$Q_3 = \dfrac{3(N+1)}{4}$ वें मद का आकार है।

उदाहरण 9

किसी परीक्षा में दस छात्रों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों के आँकड़ों से निम्न चतुर्थक के मान का परिकलन कीजिए।

22, 26, 14, 30, 18, 11, 35, 41, 12, 32.

आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

11, 12, 14, 18, 22, 26, 30, 32, 35, 41.

$Q_1 = \dfrac{(N+1)}{4}$ वें मद का आकार = $\dfrac{(10+1)}{4}$ वें मद का आकार = 2.75 वें मद का आकार =

2वाँ मद + .75 (3वाँ मद - 2वाँ मद) = 12 + .75 (14-12) = 13.5 अंक।

क्रियात्मक गतिविधि

- तृतीय चतुर्थक (Q_3) स्वयं ज्ञात करें।

5. बहुलक (Mode)

कभी-कभी आपको किसी शृंखला से अति प्ररूपी मान अथवा उस मान को, जिसके आस-पास मदों का संकेंद्रीकरण अधिकतम हो, जानने की उत्सुकता हो सकती है। उदाहरण के लिए, एक विनिर्माता जूते के उस आकार, जिसकी माँग अधिकतम है या किसी खास स्टाइल की शर्ट, जिसकी बहुत अधिक माँग है, के बारे में जानना चाहता है। ऐसी स्थिति में बहुलक एक सर्वाधिक उपयुक्त माप है। बहुलक शब्द फ्रेंच भाषा के शब्द 'ला मोड (La Mode)' से व्युत्पन्न है, जो वितरण के सर्वाधिक प्रचलित मानों का द्योतक है, क्योंकि यह शृंखला में सबसे अधिक बार दोहराया जाता है। बहुलक सर्वाधिक प्रेक्षित आँकड़ा मान है। इसे M_0 के द्वारा दर्शाया जाता है।

बहुलक का अभिकलन

विविक्त शृंखला

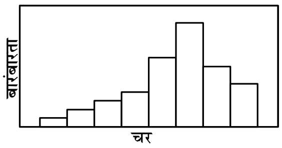
आँकड़ा समुच्चय 1, 2, 3, 4, 4, 5 को लें। यहाँ पर इस आँकड़े का बहुलक 4 है, क्योंकि यह आँकड़ा समुच्चय में सबसे अधिक बार (दो बार) आया है।

उदाहरण 10

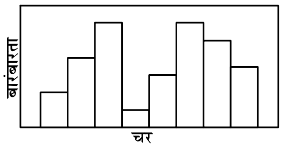
निम्नलिखित विविक्त शृंखला को देखिएः

चर	10	20	30	40	50
बारंबारता	2	8	20	10	5

यहाँ पर आप देख सकते हैं कि अधिकतम बारंबारता 20 है, अतः बहुलक का मान 30 है। चूँकि यह मोड का एकल मान है, अतः आँकड़ा एक-बहुलकी है, लेकिन यह जरूरी नहीं है कि बहुलक समांतर माध्य एवं मध्यिका की भाँति एकल ही रहे। आपके पास ऐसा आँकड़ा हो सकता है, जिसमें दो बहुलक (द्विबहुलकी) या दो से अधिक बहुलक (बहु-बहुलकी) हों। यह भी संभव है कि एक भी बहुलक न हो, यदि वितरण में कोई मान अन्य मानों की तुलना में अधिक बार प्रकट नहीं होता है। उदाहरण के लिए शृंखला 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 लें। यहां कोई भी बहुलक नहीं है।



एक बहुलक आँकड़ा



द्वि-बहुलक आँकड़ा

संतत शृंखला

संतत बारंबारता वितरण में, बहुलक वर्ग वह वर्ग है, जिसकी बारंबारता सबसे अधिक है। बहुलक को निम्नलिखित सूत्र के द्वारा परिकलित किया जा सकता हैः

$$M_O = L + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times h$$

यहाँ पर,

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

D_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता और बहुलक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग (संकेतों को छोड़कर) की बारंबारता के बीच का अंतर

D_2 = बहुलक वर्ग की बारंबारता और बहुलक वर्ग के परवर्ती वर्ग (संकेतों को छोड़कर) की बारंबारता के बीच का अंतर

h = वितरण का वर्ग अंतराल।

ध्यान रहे कि संतत शृंखला में वर्ग अंतराल समान होने चाहिए तथा शृंखला को बहुलक के परिकलन के लिए अपवर्जी होना चाहिए। यदि मध्य बिन्दु दिए गये हैं, तो वर्ग अंतरालों को निकालना पड़ता है।

उदाहरण 11

निम्नलिखित आँकड़ों के आधार पर श्रमिक परिवारों की बहुलक मासिक आय का परिकलन कीजिएः

सारणी 5.6
मासिक आय का 'से कम' संचयी आवृत्ति वितरण (ह.जार रुपये)

मासिक आय (ह.जार रुपये)	संचयी आवृत्ति या बारंबारता
50 से कम	97
45 से कम	95
40 से कम	90
35 से कम	80
30 से कम	60
25 से कम	30
20 से कम	12
15 से कम	04

जैसा कि आप देख सकते हैं, यह संचयी आवृत्ति वितरण की स्थिति है। बहुलक को परिकलित करने के लिए आपको इसे अपवर्जी शृंखला में बदलना होगा। इस उदाहरण में, शृंखला अवरोही क्रम में है। बहुलक वर्ग को निर्धारित करने के लिए समूहन एवं विश्लेषण सारणी (सारणी 5.7) बनानी होगी।

सारणी 5.7

आय समूह (ह.जार रुपये)	आवृत्ति
45-50	97-95 = 2
40-45	95-90 = 5
35-40	90-80 = 10
30-35	80-60 = 20
25-30	60-30 = 30
20-25	30-12 = 18
15-20	12-04 = 08
10-15	04

बहुलक का मूल्य 25-30 वर्ग अंतराल में पड़ता है। निरीक्षण करने पर यह देखा जा सकता है कि यह बहुलक वर्ग है।

अब $L = 25, D_1 = (30 - 18) = 12, D_2 = (30 - 20) = 10, h = 5$

सूत्र का प्रयोग करके बहुलक का मान इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैंः

M_O (ह.जार रुपये)

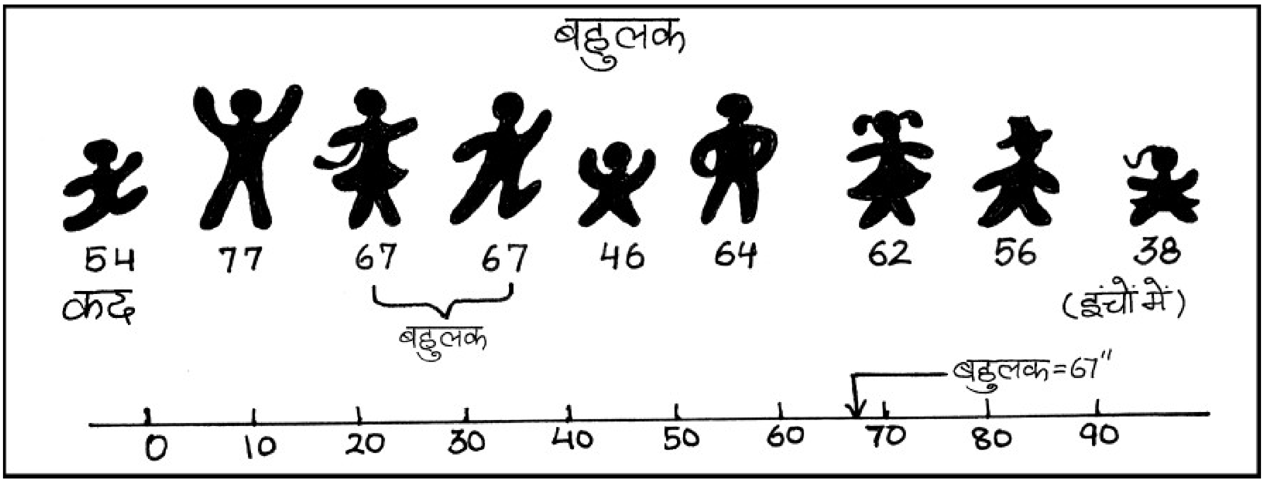
$$M_0 = L + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times h$$

$$= 25 + \frac{12}{10+12} \times 5 = 27.273$$

अतः श्रमिक परिवार की बहुलक आय 27.273 रु है।

क्रियात्मक गविविधियाँ

- एक जूता कंपनी, जो केवल वयस्कों के लिए जूते बनाती है, जूतों का सर्वाधिक लोकप्रिय आकार जानना चाहती है। इसके लिए कौन-सा माध्य सर्वाधिक उपयुक्त होगा?
- निम्नलिखित वस्तुओं का उत्पादन करने वाली कंपनियों के लिए कौन-सा औसत सर्वाधिक उपयुक्त रहेगा?
  (1) डायरी तथा कॉपी
  (2) स्कूल बैग
  (3) जीन्स तथा टी शर्ट
- अपनी कक्षा में, चायनी.ज भोजन के लिए विद्यार्थियों की प्राथमिकता जानने के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति उपयुक्त माप का उपयोग करते हुए एक संक्षिप्त सर्वेक्षण करें।
- क्या बहुलक की स्थिति ग्रा.फ द्वारा ज्ञात की जा सकती है?



6. समांतर माध्य, मध्यिका एवं बहुलक की सापेक्षिक स्थिति

मान लीजिए कि,

समांतर माध्य = M_e

मध्यिका = M_i

बहुलक = M_o

इन तीनों की सापेक्षिक स्थिति $M_e > M_i > M_o$ या $M_e < M_i < M_o$ होती है। (यहाँ पादांक वर्णमाला के क्रम से आते हैं) मध्यिका सदैव समांतर माध्य और बहुलक के बीच में होती है।

7. सारांश

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप या औसतों का प्रयोग आँकड़ों के संक्षेपण के लिए किया जाता है। यह आँकड़ा-समुच्चय का वर्णन करने के लिए एकल प्रतिनिधि मान को दर्शाता है। समांतर माध्य सर्वाधिक प्रयोग किया जाने वाला औसत है। यह परिकलन में सरल एवं सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है। लेकिन यह चरम मदों की उपस्थिति से अनुचित रूप से प्रभावित होता है। इस प्रकार के आँकड़ों के लिए मध्यिका अच्छा संक्षेपण है। बहुलक का प्रयोग सामान्यतः गुणात्मक आँकड़ों की व्याख्या में किया जाता है। मध्यिका एवं बहुलक को आलेखी तौर पर आसानी से अभिकलित किया जा सकता है। मुक्तांत वितरणों के लिए भी इनका अभिकलन सरलता से किया जा सकता है। इसलिए यह महत्वपूर्ण है कि हम विश्लेषण के उद्देश्य तथा वितरण की प्रकृति को देखते हुए उपयुक्त औसत का चुनाव करें।

पुनरावर्तन

- केंद्रीय प्रवृत्ति की माप एक ऐसे एकल मान द्वारा आँकड़ों को संक्षिप्त करता है, जो संपूर्ण आँकड़ों का प्रतिनिधित्व कर सके।
- समांतर माध्य को प्रेक्षणों के मान के योग का प्रेक्षणों की संख्या से विभाजन के भागफल के रूप में परिभाषित करते हैं।
- समांतर माध्य से मदों के विचलनों का योग सदैव शून्य के बराबर होता है।
- कभी-कभी यह महत्त्वपूर्ण होता है कि विविध मदों के भार, उनके महत्व के अनुसार निर्दिष्ट किए जाएं।
- मध्यिका, वितरण का केंद्रीय मान है, अर्थात् मध्यिका से कम मानों की संख्या, इससे अधिक मानों की संख्या के बराबर होती है।
- चतुर्थक मानों के कुल समुच्चय को चार बराबर भागों में बाँटते हैं।
- बहुलक वह मान है, जो सबसे अधिक बार प्रकट होता है।

अभ्यास

1. निम्नलिखित स्थितियों में कौन सा औसत उपयुक्त होगा?
   (क) तैयार वस्त्रों के औसत आकार।
   (ख) एक कक्षा में छात्रों की औसत बौद्धिक प्रतिभा।
   (ग) एक कारखाने में प्रति पाली औसत उत्पादन।
   (घ) एक कारखाने में औसत मजदूरी।
   (ङ) जब औसत से निरपेक्ष विचलनों का योग न्यूनतम हो।
   (च) जब चरों की मात्रा अनुपात में हो।
   (छ) मुक्तांत बारंबारता बंटन के मामले में।
2. प्रत्येक प्रश्न के सामने दिए गए बहु विकल्पों में से सर्वाधिक उचित विकल्प को चिह्नित करेंः
   (i) गुणात्मक मापन के लिए सर्वाधिक उपयुक्त औसत हैः
      (क) समांतर माध्य
      (ख) मध्यिका
      (ग) बहुलक
      (घ) ज्यामितीय माध्य
      (ङ) उपर्युक्त में से कोई नहीं
   (ii) चरम मदों को उपस्थिति से कौन सा औसत सर्वाधिक प्रभावित होता हैः
      (क) मध्यिका
      (ख) बहुलक
      (ग) समांतर माध्य
      (घ) उपरोक्त में से कोई नहीं

(iii) समांतर माध्य से मूल्यों के किसी समुच्चय के विचलन का बीजगणितीय योग है-

(क) द

(ख) 0

(ग) 1

(घ) उपर्युक्त कोई भी नहीं।

[उत्तर (1) (ख) (2) (ग) (3) (ग)]

3. बताइए कि निम्नलिखित कथन सही है या गलत-

(क) मध्यिका से मदों के विचलनों का योग शून्य होता है।

(ख) शृंखलाओं की तुलना के लिए मात्र औसत ही पर्याप्त नहीं है।

(ग) समांतर माध्य एक स्थैतिक मूल्य है।

(घ) उच्च चतुर्थक शीर्ष 25 प्रतिशत मदों का निम्नतम मान है।

(ङ) मध्यिका चरम प्रेक्षणों द्वारा अनुचित रूप से प्रभावित होती है।

[(क) गलत (ख) सही (ग) गलत (घ) सही (ङ) गलत]

4. यदि नीचे दिए गए आँकड़ों का समांतर माध्य 28 है, तो (क) लुप्त आवृत्ति का पता करें, और (ख) शृंखला की मध्यिका ज्ञात करें।

प्रति खुदरा दुकान लाभ (रु में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
खुदरा दुकानों की संख्या	12	18	27	-	17	6

(उत्तर - लुप्त आवृत्ति का मान 20 है और मध्यिका का मान 27.41 रु है)

5. निम्नलिखित सारणी में एक कारखाने के 10 मजदूरों की दैनिक आय दी गई है। इनका समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

मजदूर	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
दैनिक आय (रु में)	120	150	180	200	250	300	220	350	370	260

(उत्तर - रु 240)

6. निम्नलिखित सूचना 150 परिवारों की दैनिक आय से संबद्ध है। समांतर माध्य का परिकलन कीजिए।

आय (रु में)		परिवारों की संख्या
75 से अधिक		150
85	,,	140
95	,,	115
105	,,	95
115	,,	70
125	,,	60
135	,,	40
145	,,	25

(उत्तर - 116.3 रु)

7. नीचे एक गाँव के 380 परिवारों की जोतों का आकार दिया गया है। जोत का मध्यिका आकार ज्ञात कीजिए।

जोतों का आकार (एकड़ में)	100 से कम	100-200	200-300	300-400	400 तथा उससे अधिक
परिवारों की संख्या	40	89	148	64	39

(उत्तर 241.22 एकड़)

8. निम्न शृंखला किसी कंपनी में नियोजित मजदूरों की दैनिक आय से संबद्ध है। अभिकलन कीजिएः (क) निम्नतम 50 प्रतिशत मजदूरों की उच्चतम आय (ख) शीर्ष 25 प्रतिशत मजदूरों द्वारा अर्जित न्यूनतम आय और (ग) निम्नतम 25 प्रतिशत मजदूरों द्वारा अर्जित अधिकतम आय।

दैनिक आय (रु में)	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
मजदूरों की संख्या	5	10	15	20	10	5

(संकेत - मध्य, निम्न चतुर्थक तथा उच्च चतुर्थक का अभिकलन कीजिए)

[उत्तर - (क) रु 25.11 (ख) रु 19.92 (ग) रु 29.19,

9. निम्न सारणी में किसी गाँव के 150 खेतों में गेहूँ की प्रति हेक्टेयर पैदावार दी गई है। समांतर माध्य, मध्यिका तथा बहुलक के मान की गणना कीजिए।

उत्पादित फसल (प्रति हेक्टेयर कि.ग्रा. में)	50-53	53-56	56-59	59-62	62-65	65-68	68-71	71-74	74-77
खेतों की संख्या	3	8	14	30	36	28	16	10	5

(उत्तर - माध्य = 63.83 कि.ग्रा. प्रति हेक्टेयर, मध्यिका = 63.67 कि.ग्रा. प्रति हेक्टेयर, बहुलक = 63.29 कि.ग्रा. प्रति हेक्टेयर)

11099CH06

अध्याय

6

परिक्षेपण के माप

इस अध्याय के अध्ययन के बाद आप इस योग्य होंगे किः

- औसतों की सीमाएँ जान सकें;
- परिक्षेपण के माप की आवश्यकता को समझ सकें।
- परिक्षेपण के विभिन्न मापों का परिगणन कर सकें;
- मापों का परिकलन और उनकी तुलना कर सकें;
- निरपेक्ष एवं सापेक्ष मापों के बीच भेद कर सकें।

1. प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपने पढ़ा कि किस प्रकार से आँकड़ों को एक प्रतिनिधि मान के रूप में समेटा जा सकता है। लेकिन वह मान आँकड़ों में विद्यमान परिवर्तनशीलता को नहीं दर्शाता है। इस अध्याय में आप उन मापों का अध्ययन करेंगे जो आँकड़ों में परिवर्तनशीलताओं को मापने का प्रयास करते हैं।

तीन मित्र राम, रहीम और मारिया चाय पीते हुए बातचीत कर रहे हैं। उनकी आपसी बातचीत के दौरान, उनके अपने परिवारों की आय के बारे में चर्चा होने लगती है। राम बताता है कि उसके परिवार में चार सदस्य हैं और उसके परिवार के सदस्यों की औसत आय 15,000 रुपये है। रहीम बताता है कि उसके परिवार की औसम आय भी उतनी ही है, किंतु उसके परिवार में 6 सदस्य हैं। मारिया बताती है कि उसके परिवार में 5 सदस्य हैं, उनमें से एक काम नहीं करता है। वह भी परिकलन कर के बताती है कि उसके परिवार की भी औसत आय 15,000 रुपये है। वे तीनों काफी आश्चर्यचकित हुए, क्योंकि उन्हें मालूम है कि मारिया के पिता की आय बहुत अधिक है। उन्होंने विस्तार से पता किया और निम्नलिखित आँकड़ों को एकत्र किया:

पारिवारिक आय (रुपयों में)

क्र.स.	राम	रहीम	मारिया
1.	12,000	7,000	0
2.	14,000	10,000	7,000
3.	16,000	14,000	8,000
4.	18,000	17,000	10,000
5.	.....	20,000	50,000
6.	.....	22,000	......
कुल आय	60,000	90,000	75,000
औसत आय	15,000	15,000	15,000

क्या आपने ध्यान दिया कि सब के औसत एक जैसे है, परंतु व्यक्तिगत आय में बहुत भिन्नताएँ हैं।

यह बिल्कुल स्पष्ट है कि औसत वितरण के केवल एक पहलू के बारे में बताता है, अर्थात् मानों का प्रतिनिधि आकार। इसे बेहतर ढंग से समझने के लिए आपको मानों के प्रसरण को जानने की आवश्यकता है।

आप देख सकते हैं कि राम के परिवार में आय की भिन्नता अपेक्षाकृत कम है। रहीम के परिवार में आय की यह भिन्नता काफी अधिक है, जबकि मारिया के परिवार में यह भिन्नता अधिकतम है। केवल औसत का ज्ञान अपर्याप्त है।

यदि आपको किसी अन्य मान की जानकारी हो, जो मान में विचरण की मात्रा को प्रदर्शित करता है, तो उस वितरण के बारे में आपका ज्ञान बढ़ जायेगा। उदाहरण के लिए, प्रतिव्यक्ति आय केवल औसत आय को प्रदर्शित करती है। परिक्षेपण की माप आपको आय की असमानताओं के बारे में बता सकता है। इस तरह से समाज के विभिन्न वर्गों के लोगों के सापेक्ष जीवन-स्तर के बारे में आपकी जानकारी में वृद्धि होगी।

परिक्षेपण यह दर्शाता है कि वितरण का मान उसके औसत मान से कितना भिन्न है।

विचरण विभिन्नता के विस्तार को निर्धारित करने हेतु कुछ निश्चित माप हैं, जो इस प्रकार हैः

(क) परास

(ख) चतुर्थक विचलन

(ग) माध्य विचलन

(घ) मानक विचलन

इन मापों के अतिरिक्त, जो संख्यात्मक मान देते हैं, परिक्षेपण के अनुमान के लिए आरेखीय विधि भी है।

परास एवं चतुर्थक विचलन परिक्षेपण की माप उस प्रसरण के परिकलन द्वारा करते हैं, जिसमें ये मान निहित होते हैं। माध्य विचलन तथा मानक विचलन औसत से मानों के अंतर की मात्रा को मापते हैं।

2. मानों के प्रसरण पर आधारित माप

परास (Range)

परास किसी वितरण में अधिकतम (L) एवं न्यूनतम (S) मानों के बीच का अंतर है। अतः, R = L - S। परास का अधिक मान अधिक परिक्षेपण दर्शाता है और, इसके विपरीत कम मान निम्न परिक्षेपण को दर्शाता है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

निम्नलिखित मानों को देखें:
20, 30, 40, 50, 200

- परास का परिकलन कीजिये।
- यदि आँकड़ा समुच्चय में मान 200 नहीं हो तो परास क्या होगा?
- यदि 50 के स्थान पर 150 हो तो परास क्या होगा?

परास : टिप्पणी

परास चरम मान के द्वारा अनुचित रूप से प्रभावित होता है। यह सभी मानों पर आधारित नहीं है। जब तक न्यूनतम एवं अधिकतम मान अपरिवर्तित रहते हैं, तब तक दूसरे मानों में कोई भी बदलाव परास को प्रभावित नहीं करता। इसे मुक्तांत बारंबारता वितरण में परिकलित नहीं किया जा सकता है।

कुछ सीमाओं के होते हुए भी परास अपनी सरलता के कारण आसानी से समझा एवं बहुधा प्रयुक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए, हम लोग दूरदर्शन पर विभिन्न शहरों का दैनिक अधिकतम एवं न्यूनतम तापमान देखते रहते हैं और तापमान विविधता के आधार पर उनके बारे में राय बनाते हैं।

मुक्तांत वितरण वे हैं, जिनमें या तो निम्नतम वर्ग की निम्न सीमा या उच्चतम वर्ग की उच्च सीमा या दोनों ही नहीं दी होती हैं।

क्रियात्मक गतिविधि

- एक समाचार-पत्र से 10 कंपनियों के शेयर के 52 सप्ताहों के उच्च एवं निम्न मूल्यों के आँकड़े संग्रहित कीजिए। शेयर कीमतों के परास का परिकलन कीजिए। किस कंपनी का शेयर सर्वाधिक अस्थिर एवं कौन-सा सर्वाधिक स्थिर है?

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

किसी वितरण में उच्च या निम्न किसी भी चरम मान की उपस्थिति परिक्षेपण के माप के रूप में परास की उपयोगिता को घटा सकती है। इसलिए, आपको एक ऐसे माप की जरूरत हो सकती है, जो कि बाह्यमूल्यों से अनुचित रूप से प्रभावित न हो।

ऐसी स्थिति में, यदि संपूर्ण आँकड़ों को चार बराबर भागों में विभाजित किया जाए, तो प्रत्येक में मानों का 25% भाग समाहित होगा, जिससे हमें चतुर्थकों एवं मध्यिका का मान प्राप्त होता है (जिनके बारे में आप पहले ही अध्याय 5 में पढ़ चुके हैं)। उच्च एवं निम्न चतुर्थक (क्रमशः Q_3 एवं Q_1) का प्रयोग अंतर-चतुर्थक परास के परिकलन में किया जाता है, जो $Q_3 – Q_1$ हैं।

अंतर-चतुर्थक परास, किसी वितरण में माध्य के 50% मानों पर आधारित होता है। अतः वह चरम मान के द्वारा प्रभावित नहीं होता है। अंतर-चतुर्थक परास के आधे को चतुर्थक-विचलन (Q.D) कहा जाता है। अतः

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2},$$

चतुर्थक विचलन को अर्ध-अंतर-चतुर्थक परास भी कहा जाता है।

असमूहित आँकड़ों के लिए परास और चतुर्थक विचलन का परिकलन।

उदाहरण 1

निम्नलिखित प्रेक्षणों का परास और चतुर्थक विचलन परिकलित कीजिए:

20, 25, 29, 30, 35, 39, 41, 48,

51, 60 और 70

स्पष्टतः परास 70 - 20 = 50 है।

चतुर्थक विचलन के लिए हमें उच्च Q_3 एवं निम्न Q_1 के मानों को परिकलित करने की आवश्यकता होती है।

Q_1 मान $\frac{n+1}{4}$ वें मद का आकार है।

चूँकि n 11 है, Q_1 तीसरे मद का आकार है।

क्योंकि मानों को पहले ही आरोही क्रम में व्यवस्थित किया हुआ है, यह देखा जा सकता है कि Q_1 तीसरा मान 29 है। (यदि ये मान एक क्रम में नहीं हों तो आप क्या करेंगे?)

ठीक इसी तरह से, Q_3 $\frac{3(n+1)}{4}$वें मद का आकार है, अर्थात 9वें मद का मान, 51 है। अतः

Q_3 = 51

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{51-29}{2} = 11$$

क्या आपने ध्यान दिया है कि Q.D. मध्यिका से चतुर्थकों का औसत अंतर है।

क्रियात्मक गतिविधि

- मध्यिका का परिकलन कीजिए और जाँच कीजिए कि उपर्युक्त कथन सही है या नहीं।

बारंबारता वितरण के लिए परास और चतुर्थक विचलन का परिकलन

उदाहरण 2

किसी कक्षा के 40 छात्रों द्वारा प्राप्तांकों के वितरण में

परास एवं चतुर्थक विचलन का परिकलन कीजिए।

सारणी 6.1

वर्ग अंतराल C I	छात्रों की संख्या (f)
0-10	5
10-20	8
20-40	16
40-60	7
60-90	4
	40

परास उच्चतम वर्ग की उच्च सीमा तथा निम्नतम वर्ग की निम्न सीमा के बीच का अंतर है। इसलिए, परास 90-0=90 है। चतुर्थक विचलन के लिए, सबसे पहले संचयी बारंबारता को निम्नानुसार परिकलित कीजिएः

वर्ग अंतराल *CI*	बारंबारता *f*	संचयी बारंबारता *c. f.*
0-10	5	05
10-20	8	13
20-40	16	29
40-60	7	36
60-90	4	40
	n = 40	

एक संतत श्रृंखला में Q_1 का मान $\frac{n}{4}$वें मद का आकार है। अतः यह 10वें मद का आकार है, जो कि वर्ग 10-20 में निहित है। अतः Q_1 वर्ग 10-20 में निहित है। Q_1 का सही मान परिकलित करने हेतु, निम्नलिखित सूत्र प्रयुक्त होता हैः

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times i$$

यहाँ पर L = 10 (संगत चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा) है।

c.f. = 5 (चतुर्थक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग के लिए c.f. का मान)

i = 10 (चतुर्थक वर्ग का अंतराल)

f = 8 (चतुर्थक वर्ग की बारंबारता)

अतः

$$Q_1 = 10 + \frac{10-5}{8} \times 10 = 16.25$$

ठीक इसी तरह से, Q_3 का मान $\frac{3n}{4}$ वें मद का आकार है, अर्थात् 30वें मद का मान जो वर्ग 40-60 में निहित है। अब Q_3 के सूत्र का

प्रयोग करते हुए इसके मान को निम्न तरीके से परिकलित किया जा सकता हैः

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$Q_3 = 40 + \frac{30 - 29}{7} \times 20$$

$$Q_3 = 42.87$$

$$Q.D. = \frac{42.87 - 16.25}{2} = 13.31$$

विविक्त एवं व्यष्टिगत शृंखलाओं में, Q_1 का मान $\frac{n+1}{4}$ वें मद का आकार है। लेकिन संतत वितरण में, यह मान $\frac{n}{4}$ वें मद का आकार होता है। ठीक इसी प्रकार से, Q_3 और मध्यिका के लिए भी n+1 की जगह में n प्रयुक्त होता है।

यदि समूचे समूह को दो बराबर भागों में बाँटा जाए और प्रत्येक भाग की मध्यिका परिकलित की जाए तो आपके पास बेहतर छात्रों की मध्यिका तथा कमजोर छात्रों की मध्यिका होगी। ये मध्यिकाएँ समूचे समूह की मध्यिका से औसतन 13.31 से भिन्न हैं। ठीक इसी प्रकार से, मान लीजिए, आप के पास एक कस्बे के लोगों की आय के आँकड़े हैं, तो सभी लोगों की मध्यिका आय परिकलित की जा सकती है। अब यदि सभी लोगों को दो बराबर भागों, धनी एवं निर्धन समूहों में बाँट दिया जाए तो इनकी मध्यिकाएँ परिकलित की जा सकती हैं। चतुर्थक विचलन आपको धनी समूह से संबंधित तथा निर्धन समूह से संबंधित मध्यिकाओं के, पूरे समूह की मध्यिका से, औसत अंतर को बताएगा। सामान्यतः चतुर्थक विचलन मुक्तांत वितरण के लिए परिकलित किया जा सकता है और यह चरम मानों द्वारा अनुचित रूप से प्रभावित नहीं होता है।

3. **औसत से परिक्षेपण के माप**

आपको याद होगा कि परिक्षेपण हमें यह बतलाता है कि किसी वितरण की विभिन्न मदों का मान वितरण के औसत मान से किस सीमा तक भिन्न है। परास और चतुर्थक विचलन माप में उपयोगी नहीं हैं कि मान अपने औसत से कितनी दूर हैं, फिर भी मानों के प्रसरण के परिकलन द्वारा वे परिक्षेपण के बारे में एक अच्छा अनुमान दे देते हैं। दो माप, जोकि मानों के अपने औसत से विचलन पर आधारित होते हैं वे हैं, माध्य विचलन और मानक विचलन।

चूँकि औसत एक केंद्रीय मान है, कुछ विचलन धनात्मक और कुछ ऋणात्मक होते हैं। अगर उन्हें ऐसे ही जोड़ दिया जाए, तो जोड़ से कोई परिणाम नहीं निकलेगा। वास्तव में समांतर माध्य से विचलनों का योग सदैव शून्य होता है। मानों के निम्न दो समुच्चयों को देखेंः

समुच्चय अः	5,	9,	16
समुच्चय बः	1,	9,	20

आप देख सकते हैं कि समुच्चय ब में मान अपने औसत से अधिक दूर है और इसलिए समुच्चय अ के मानों की अपेक्षा अधिक प्रसरित है। यहाँ समांतर माध्य से विचलनों को परिकलित कीजिए और फिर उन्हें जोड़ दीजिए। आपने क्या देखा? अब यही क्रिया मध्यिका के साथ दोहराइए। क्या आप परिकलित मानों से विचरण की मात्रा पर टिप्पणी कर सकते हैं? माध्य विचलन, विचलनों के संकेतों की उपेक्षा करके इस समस्या का समाधान करने की कोशिश करता है, अर्थात् यह सभी विचलनों को धनात्मक मानता है। मानक विचलन के लिए, पहले विचलनों के वर्गों का परिकलन करके उनका औसत निकाला जाता

है। इसके बाद औसत का वर्गमूल निकाला जाता है। अब हम विस्तार से इन पर चर्चा करेंगे।

माध्य विचलन (Mean Deviation)

मान लीजिए पाँच कस्बों A, B, C, D और E के लिए एक कॉलेज प्रस्तावित किया जाता है। ये कस्बे एक सड़क के किनारे इसी क्रम से स्थित हैं। A कस्बे से दूसरे कस्बों की दूरी (किलोमीटर में) तथा छात्रों की संख्या नीचे दी जा रही है।

कस्बे	कस्बा A से दूरी	छात्रों की संख्या
A	0	90
B	2	150
C	6	100
D	14	200
E	18	80
		620

अब, यदि कॉलेज कस्बा A में स्थित होता है तो कस्बा B के 150 छात्र 2 किमी प्रति छात्र के हिसाब से (कुल 300 किमी) यात्रा करके कॉलेज पहुँचेंगे। उद्देश्य यह है कि ऐसी जगह पता करें, जिससे छात्रों को कम से कम औसत दूरी की यात्रा करनी पड़े।

आप देख सकते हैं कि यदि कॉलेज A या E कस्बे में स्थित होता है तो छात्रों को औसतन अधिक यात्रा करनी होगी और यदि कॉलेज किसी मध्यवर्ती जगह पर स्थित होता है, तो उन्हें अपेक्षाकृत कम यात्रा करनी पड़ेगी। माध्य विचलन औसत से अंतरों का समांतर माध्य है। यहाँ प्रयुक्त उपयुक्त सांख्यिकी उपकरण है जिससे छात्रों द्वारा तय की गई औसत दूरी का आकलन किया जा सकता है। माध्य विचलन औसत या तो समांतर माध्य है या मध्यिका।

(चूँकि बहुलक एक स्थिर औसत नहीं है अतः माध्य विचलन के परिकलन हेतु इसका प्रयोग नहीं किया जाता है)।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

- यदि कॉलेज कस्बा A या कस्बा C या कस्बा E में स्थापित होता है तो छात्रों द्वारा यात्रा की गई कुल दूरी को परिकलित कीजिए। इसके साथ ही यदि यह कस्बा A और E के ठीक बीच में स्थित होता है, तो भी दूरी परिकलित कीजिए।
- बताइए कि आपकी राय में यदि हर कस्बे में एक छात्र हो तो कॉलेज कहाँ पर स्थापित होना चाहिए? क्या इससे आप का उत्तर बदल जाता है?

असमूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य से माध्य विचलन का परिकलन

प्रत्यक्ष विधि

इस विधि के निम्नलिखित चरण हैंः

(क) मानों का समांतर माध्य परिकलित किया जाता है।

(ख) प्रत्येक मान और समांतर माध्य के बीच के अंतर का परिकलन किया जाता है। ये सभी अंतर धनात्मक माने जाते हैं। इन्हें $|d|$ द्वारा दर्शाया जाता है।

(ग) इन अंतरों का समांतर माध्य, माध्य विचलन है।

अर्थात् $\text{M.D.} = \dfrac{\Sigma|d|}{n}$

उदाहरण 3

निम्नलिखित मानों का माध्य विचलन परिकलित कीजिएः 2, 4, 7, 8 एवं 9.

समांतर माध्य $(\text{A.M.}) = \dfrac{\Sigma X}{n} = \dfrac{30}{5} = 6$

X	$\|d\|$
2	4
4	2
7	1
8	2
9	3
	12

$$\text{M.D.}_{(\bar{x})} = \frac{12}{5} = 2.4$$

कल्पित माध्य विधि

माध्य विचलन कल्पित माध्य से परिकलित विचलनों द्वारा भी निकाला जा सकता है। यह विधि विशेष रूप से तब अपनाई जाती है, जब वास्तविक माध्य भिन्नात्मक संख्या में होता है। (यह ध्यान रखें कि कल्पित माध्य वास्तविक माध्य के निकट हो)।

उदाहरण 3 के मानों के लिए मान 7 को कल्पित माध्य लेकर माध्य विचलन निम्न तरह से परिकलित किया जा सकता हैः

उदाहरण 4

X	$\|d\|$
2	5
4	3
7	0
8	1
9	2
	11

ऐसे मामलों में, निम्नलिखित सूत्र प्रयुक्त होता हैः

$$\text{M.D.}_{(\bar{x})} = \frac{\Sigma|d| + (\bar{x} - A\bar{x})(\Sigma f_B - \Sigma f_A)}{n}$$

यहाँ पर $\Sigma|d|$ कल्पित माध्य से लिए गए निरपेक्ष विचलनों का योग है।

$\bar{x}$ वास्तविक माध्य है।

$A\bar{x}$ कल्पित माध्य है, जो विचलनों के परिकलन में प्रयुक्त होता है।

Σf_B वास्तविक माध्य तथा उससे नीचे के मानों की संख्या है।

Σf_A वास्तविक माध्य से ऊपर के मानों की संख्या है।

सूत्र में मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$\text{M.D.}_{(\bar{x})} = \frac{11 + (6-7)(2-3)}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

असमूहित आँकड़ों के लिए मध्यिका से माध्य विचलन

विधि

उदाहरण 3 के मानों का प्रयोग करते हुए मध्यिका से माध्य विचलनों को निम्न प्रकार से परिकलित किया जा सकता है,

(क) मध्यिका को परिकलित कीजिए जो 7 है।

(ख) मध्यिका से निरपेक्ष विचलन परिकलित कीजिए, $|d|$ के रूप में दिखाइए।

(ग) इन निरपेक्ष विचलनों का औसत ज्ञात कीजिए। यह माध्य विचलन है।

उदाहरण 5

X	$\|d\| = \|X\text{-मध्यिका}\|$
2	5
4	3
7	0
8	1
9	2
	11

मध्यिका से माध्य विचलन इस प्रकार हैः

$$\text{M.D.}_{(\text{Median})} = \frac{\Sigma|d|}{n} = \frac{11}{5} = 2.2$$

संक्षिप्त विधि

संक्षिप्त विधि द्वारा माध्य विचलन को परिकलित करने हेतु किसी मान (A) को विचलनों के परिकलन के लिए प्रयुक्त किया जाता है और इसके लिए निम्न

सूत्र है,

$$M.D._{(Median)} = \frac{\Sigma|d| + (Median - A)(\Sigma f_B - \Sigma f_A)}{n}$$

यहाँ पर A = एक स्थिरांक है, जिससे विचलनों को परिकलित करते हैं (अन्य संकेतक वैसे ही रहेंगे जैसे कि कल्पित माध्य विधि में है)।

संतत वितरण के लिए माध्य से माध्य विचलन

सारणी 6.2

कंपनियों का लाभ (लाख रु. में) वर्ग अंतराल	कंपनियों की संख्या बारंबारता
10-20	5
20-30	8
30-50	16
50-70	8
70-80	3
	40

चरण

(क) वितरण का माध्य परिकलित कीजिए।

(ख) माध्य से वर्गों के मध्य बिंदुओं का निरपेक्ष विचलन $|d|$ परिकलित कीजिए।

(ग) $f|d|$ का मान प्राप्त करने के लिए प्रत्येक $|d|$ मान को इसकी संगत बारंबारता से गुणा कीजिए और इन्हें जोड़कर $\Sigma f|d|$ प्राप्त कीजिए।

(घ) निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए

$$M.D._{(\bar{x})} = \frac{\Sigma f|d|}{\Sigma f}$$

सारणी 6.2 में वितरण का माध्य विचलन निम्नानुसार भी परिकलित कर सकते हैं:

उदाहरण 6

वर्ग अंतराल	बारंबारता	मध्य बिन्दु	$\|d\|$ $\bar{x}$ =40.5	$f\|d\|$
10-20	5	15	25.5	127.5
20-30	8	25	15.5	124.0
30-50	16	40	0.5	8.0
50-70	8	60	19.5	156.0
70-80	3	75	34.5	103.5
	40		519.0	

$$M.D._{(\bar{x})} = \frac{\Sigma f|d|}{\Sigma f} = \frac{519}{40} = 12.975$$

मध्यिका से माध्य विचलन

सारणी 6.3

वर्ग अंतराल	बारंबारता
20-30	5
30-40	10
40-60	20
60-80	9
80-90	6
	50

मध्यिका से माध्य विचलन परिकलित करने की प्रक्रिया ठीक वैसी ही है, जैसी कि माध्य से माध्य विचलन के लिए होती है, सिवाय इसके कि विचलन मध्यिका से लिए जायें, जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

उदाहरण 7

वर्ग अंतराल	बारंबारता	मध्य बिंदु	$\|d\|$ m=40.5	$f\|d\|$
20-30	5	25	25	125
30-40	10	35	15	150
40-60	20	50	0	0
60-80	9	70	20	180
80-90	6	85	35	210
	50			665

$$\text{M.D.}_{(\text{Median})} = \frac{\Sigma f\,|d|}{\Sigma f}$$

$$= \frac{665}{50} = 13.3$$

माध्य विचलन : टिप्पणी

माध्य विचलन सभी मानों पर आधारित होता है। अतः एक भी मान में परिवर्तन इस पर प्रभाव डालेगा। यदि इसे मध्यिका से परिकलित किया जाए तो माध्य विचलन निम्नतम होगा, अर्थात् यदि इसे माध्य से परिकलित किया जाए तो यह अधिक होगा। परंतु, यह विचलनों के चिह्नों की उपेक्षा करता है और मुक्तांत वितरण के लिए परिकलित नहीं किया जा सकता है।

मानक विचलन (Standard Deviation)

मानक विचलन माध्य से विचलनों के वर्गों के माध्य का धनात्मक वर्गमूल है। इसलिए यदि पाँच मान x_1, x_2, x_3, x_4 एवं x_5 हैं, तो सबसे पहले इनका माध्य परिकलित किया जाता है। इसके बाद माध्य से मानों के विचलन परिकलित किए जाते हैं। फिर इन विचलनों का वर्ग किया जाता है। इन वर्ग विचलनों का माध्य प्रसरण कहलाता है। प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल मानक विचलन होता है। (यह ध्यान दें कि मानक विचलन का परिकलन केवल माध्य के आधार पर होता है)।

असमूहित आँकड़ों के लिए मानक विचलन का परिकलन

व्यक्तिगत मानों के मानक विचलन के परिकलन के लिए चार वैकल्पिक विधियाँ उपलब्ध हैं। इन सभी विधियों के द्वारा मानक विचलन का मान एक ही प्राप्त होता है। ये निम्न हैं:

(क) वास्तविक माध्य विधि

(ख) कल्पित माध्य विधि

(ग) प्रत्यक्ष विधि

(घ) पद विचलन विधि

वास्तविक माध्य विधि

मान लीजिए, आपको निम्नलिखित मानों का मानक विचलन परिकलित करना हैः

5, 10, 25, 30, 50

इसकी गणना के लिए प्रथम चरण यह होगा

$$\bar{X} = \frac{5+10+25+30+50}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

उदाहरण 8

X	$d\ (x - \bar{x})$	d^2
5	-19	361
10	-14	196
25	+1	1
30	+6	36
50	+26	676
	0	1270

अब निम्नलिखित सूत्र प्रयुक्त होगाः

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

$$\sigma = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1270}{5}} = \sqrt{254} = 15.937$$

उपर्युक्त उदाहरण में जिस मान से विचलन परिकलित किए गए हैं, क्या आपने उस मान पर ध्यान दिया है? क्या यह वास्तविक माध्य है?

कल्पित माध्य विधि

इन्हीं मानों के लिए विचलन को किसी भी स्वैच्छिक मान $A\bar{x}$ से परिकलित किया जा सकता है। $d = x - A\bar{x}$, $A\bar{x} = 25$ लेते हुए मानक विचलन का अभिकलन नीचे दिखाया गया है,

उदाहरण 9

X	$d\ (x - A\ \bar{x}\ )$	d^2
5		-20400
10	-15	225
25	0	0
30	+5	25
50	+25	625
	-5	1275

मानक विचलन के लिए सूत्र,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1275}{5} - \left(\frac{-5}{5}\right)^2} = \sqrt{254} = 15.937$$

> इसे जान लें कि वास्तविक माध्य के अतिरिक्त अन्य किसी मान से विचलन का योग शून्य के बराबर नहीं होगा।

प्रत्यक्ष विधि

मानक विचलन को मानों से सीधे भी, अर्थात् विचलनों को बिना लिए भी, परिकलित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे दिखाया गया हैः

उदाहरण 10

X	X^2
5	25
10	100
25	625
30	900
50	2500
120	4150

(यहाँ विचलन शून्य से लिए गए माने जा सकते हैं)।

यहाँ निम्नलिखित सूत्र प्रयुक्त किया जायगाः

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

या $$\sigma = \sqrt{\frac{4150}{5} - (24)^2}$$

या $$\sigma = \sqrt{254} = 15.937$$

> मानक विचलन उस स्थिरांक मान के द्वारा प्रभावित नहीं होता, जिससे कि विचलनों को परिकलित किया गया है। मानक विचलन के इस सूत्र में, स्थिरांक का मान दृश्य नहीं होता हैं, इसलिए मानक विचलन उद्गम से स्वतंत्र होता है।

पद - विचलन विधि

यदि मान किसी समापवर्तक से विभाज्य है, तो उन्हें इससे विभाजित किया जा सकता है और मानक विचलन को प्राप्त मानों से निम्नानुसार परिकलित किया जा सकता हैः

उदाहरण 11

चूँकि सभी पाँचों मान समापवर्तक 5 से विभाज्य हैं, अतः विभाजन करके हम निम्न मान प्राप्त करते हैं:

x	x'	$d'\ (x - Ax')$_	d'^2
5	1	-3.8	14.44
10	2	-2.8	7.84
25	5	+0.2	0.04
30	6	+1.2	1.44
50	10	+5.2	27.04
		0	50.80

ऊपर दी गई सारणी में,

$x' = \frac{X}{C}$,यहाँ पर C= समापवर्तक है।

प्रथम परण

$\overline{x}' = \frac{1+2+6+10}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$

मानक विचलन के परिकलन हेतु निम्न सूत्र प्रयुक्त किया जाता हैः

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n}} \times c$$

मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$\sigma = \sqrt{\frac{50.80}{5}} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5$$

$$\sigma = 15.937$$

वैकल्पिक तौर पर, किसी समापवर्तक द्वारा मानों को विभाजित करने की अपेक्षा, विचलनों की गणना कर और किसी समापवर्तक से विभाजित किया जा सकता है। मानक विचलन का परिकलन निम्नानुसार किया जा सकता है।

उदाहरण 12

x	$d = (x-25)$	$d' = (d/5)$	d'^2
5	-20	-4	16
10	-15	-3	9
25	0	0	0
30	+5	+1	1
50	+25	+5	25
		-1	51

यहाँ विचलन को स्वैच्छिक मान 25 से परिकलित किया गया है। विचलनों को विभाजित करने के लिए समापवर्तक 5 को प्रयुक्त किया गया है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d'}{n}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{51}{5} - \left(\frac{-1}{5}\right)^2} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5 = 15.937$$

> मानक विचलन पैमाने पर स्वतंत्र नहीं होता है। अतः, यदि मान या विचलन एक समापवर्तक से विभाजित होते हैं तो मानक विचलन ज्ञात करने के लिए समापवर्तक का मान सूत्र में प्रयुक्त होता है।

संतत बारंबारता वितरण में मानक विचलन

असमूहित आँकड़ों की भाँति, समूहित आँकड़ों के लिए मानक विचलन को किसी भी निम्नलिखित विधि के द्वारा परिकलित किया जा सकता हैः

(क) वास्तविक माध्य विधि

(ख) कल्पित माध्य विधि

(ग) पद-विचलन विधि

वास्तविक माध्य विधि

सारणी 6.2 में दिए मानों के लिए मानक विचलन को निम्नानुसार परिकलित किया जा सकता है।

उदाहरण 13

(1) (C.I.)	(2) f	(3) m	(4) fm	(5) d	(6) fd	(7) fd^2
10-20	5	15	75	-25.5	-127.5	3251.25
20-30	8	25	200	-15.5	-124.0	1922.00
30-50	16	40	640	-0.5	-8.0	4.00
50-70	8	60	480	+19.5	+156.0	3042.00
70-80	3	75	225	+34.5	+103.5	3570.75
	40		1620		0	11790.00

निम्नलिखित चरण अपनाए जाते हैंः

1. वितरण का माध्य परिकलित कीजिए।

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} = \frac{1620}{40} = 40.5$$

2. माध्य से मध्यबिंदुओं का विचलन परिकलित कीजिए, ताकि $d = m - \bar{x}$ (स्तंभ 5)
3. 'fd' मान (स्तंभ 6) को पाने हेतु विचलन के साथ उसकी संगत बारंबारता को गुणा कीजिए [ध्यान दें कि Σfd = 0]
4. 'fd' मानों को 'd' मानों के साथ गुणा करके 'fd^2' परिकलित कीजिए (स्तंभ 7), इन्हें जोड़कर Σfd^2 प्राप्त करें।
5. निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिएः

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{11790}{40}} = 17.168$$

कल्पित माध्य विधि

उदाहरण 13 के मानों के लिए मानक विचलन को एक कल्पित माध्य, जैसे 40, से विचलन लेकर निम्नानुसार परिकलित किया जा सकता हैः

उदाहरण 14

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(C.I.)	*f*	*m*	*d*	*fd*	*fd²*
10-20	5	15	-25	-125	3125
20-30	8	25	-15	-120	1800
30-50	16	40	0	0	0
50-70	8	60	+20	160	3200
70-80	3	75	+35	105	3675
	40			+20	11800

निम्नलिखित चरण आवश्यक हैंः

1. वर्गों के मध्य बिंदु परिकलित करें। (स्तंभ 3)
2. किसी कल्पित माध्य से मध्य बिंदुओं के विचलन परिकलित कीजिए जैसे कि $d = m - A$ (स्तंभ 4)। कल्पित माध्य = 40 है।
3. 'fd' मानों (स्तंभ 5) की प्राप्ति हेतु 'd' के मानों को संगत बारंबारताओं से गुणा कीजिए। (यह ध्यान दें कि इस स्तंभ का कुल योग शून्य नहीं है, चूँकि विचलनों को कल्पित माध्य से लिया गया है)।
4. 'd' (स्तंभ 4) मानों के साथ fd (स्तंभ 5) मानों को गुणा कीजिए, ताकि fd^2 मान (स्तंभ 6) प्राप्त हो सकें। Σfd^2 प्राप्त कीजिए।
5. निम्नलिखित सूत्र द्वारा मानक विचलन का परिकलन किया जा सकता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

या $\sigma = \sqrt{\dfrac{11800}{40} - \left(\dfrac{20}{40}\right)^2}$

या $\sigma = \sqrt{294.75} = 17.168$

पद विचलन विधि

यदि विचलनों के मूल्य किसी समापवर्तक द्वारा विभाज्य हों तो पद विचलन विधि से परिकलनों को सरल बनाया जा सकता है, जैसा नीचे उदाहरण में दिया गया हैः

उदाहरण 15

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
C.I.	*f*	*m*	*d*	*d'*	*fd'*	*fd'²*
10-20	5	15	-25	-5	-25	125
20-30	8	25	-15	-3	-24	72
30-50	16	40	0	0	0	0
50-70 128	8	60		+20	+4	+32
70-80	3	75	+35	+7	+21	147
	40				+4	472

निम्नलिखित चरण आवश्यक हैः

1. वर्ग के मध्य बिंदुओं का परिकलन करें (स्तंभ 3) तथा किसी भी स्वैच्छिक मूल्य से इनका

विचलन निकालें, जैसा कल्पित माध्य विधि में किया जाता है। इस उदाहरण में 40 से विचलन लिए गए हैं। (कॉलम 4)

2. विचलनों को समापवर्तक C से भाग दें। उपर्युक्त उदाहरण में C = 5। इस प्रकार से प्राप्त किए गए मूल्य d' (स्तंभ 5) में दिये गये हैं।
3. d' मूल्यों को संगत f (स्तंभ 2) से गुणा करें। जिससे fd' मूल्य प्राप्त हो सके। (स्तंभ 6)
4. fd' मूल्यों को d' मूल्यों से गुणा करके fd'^2 मूल्य (स्तंभ 7) प्राप्त करें।
5 स्तंभ 6 तथा स्तंभ 7 के मूल्यों को जोड़कर $\Sigma fd'$ तथा $\Sigma fd'^2$ मूल्यों को प्राप्त करें।
6. निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{Sf} - \left(\frac{\Sigma fd'}{Sf}\right)^2} \times c$$

या, $$\sigma = \sqrt{\frac{472}{40} - \left(\frac{4}{40}\right)^2} \times 5$$

या, $$\sigma = \sqrt{11.8 - .01} \times 5$$

या, $$\sigma = \sqrt{11.79} \times 5$$
$$\sigma = 17.168$$

मानक विचलनः टिप्पणी

मानक विचलन परिक्षेपण के मापों में सर्वाधिक प्रचलित है, क्योंकि यह सभी मानों पर आधारित होता है। इसलिए, किसी भी मान में परिवर्तन, मानक विचलन के मान को प्रभावित करता है। यह उद्‌गम से स्वतंत्र है, पर स्केल से नहीं। इसके साथ ही यह कुछ उच्च सांख्यिकीय विधियों में भी प्रयुक्त होता है।

4. परिक्षेपण के निरपेक्ष तथा सापेक्ष माप

अभी तक ऊपर वर्णित सभी माप परिक्षेपण के निरपेक्ष माप हैं। वे ऐसे मान का परिकलन करते हैं, जो कभी-कभी निर्वचन में कठिन होते हैं। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित दो आँकड़ों के समुच्चय पर ध्यान दीजिए:

समुच्चय (क)	500	700	1000
समुच्चय (ख)	1,00,000	1,20,000	1,30,000

मान लीजिए समुच्चय क के मान एक आइसक्रीम विक्रेता की दैनिक बिक्री का रिकार्ड है, जबकि समुच्चय ख के मान एक बड़े डिपार्टमेंटल स्टोर की दैनिक बिक्री के हैं। समुच्चय क का परास 500 है, जबकि समुच्चय ख का परास 30,000 है। परास का मान समुच्चय ख में बहुत अधिक है। क्या आप यह कह सकते हैं कि डिपार्टमेंटल स्टोर की बिक्री में विचरण अधिक है? यह बात आसानी से देखी जा सकती है कि समुच्चय क का उच्चतम मान निम्नतम मान का दोगुना है, जबकि समुच्चय ख में यह केवल 30% अधिक है। अतः निरपेक्ष माप विचरण के प्रसरण के बारे में भ्रामक अनुमान दे सकते हैं, विशेष रूप से तब जब औसतों में महत्वपूर्ण अंतर हो।

निरपेक्ष मापों की एक अन्य कमजोरी यह है कि इनका उत्तर उस इकाई में आता है, जिसमें वास्तविक मान व्यक्त किए गए हों। फलस्वरूप, यदि मान को किलोमीटर में व्यक्त किया गया है, तो परिक्षेपण भी किलोमीटर में ही व्यक्त होगा। लेकिन यदि ठीक वही मान मीटर में व्यक्त किए गए हों तो निरपेक्ष माप भी मीटर में ही होंगे और परिक्षेपण का मान 1000 गुना प्रतीत होगा।

इन समस्याओं के हल के लिए, परिक्षेपण के सापेक्ष मान प्रयुक्त किए जाते हैं। प्रत्येक निरपेक्ष माप का एक संबद्ध प्रतिरूप होता है। अतः परास के लिए, परास-गुणांक है, जिसे निम्नानुसार परिकलित किया जाता है।

परास-गुणांक $= \frac{L - S}{L + S}$

यहाँ पर L = अधिकतम मान

S = न्यूनतम मान

ठीक इसी प्रकार से, चतुर्थक विचलन के लिए चतुर्थक विचलन गुणांक है, जिसे निम्नानुसार परिकलित किया जा सकता हैः

चतुर्थक विचलन गुणांक $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$, यहाँ पर Q_3 = तृतीय चतुर्थक तथा Q_1 = प्रथम चतुर्थक

माध्य विचलन के लिए, यह माध्य विचलन गुणांक है।

माध्य विचलन गुणांक =

$\frac{M.D.(\bar{x})}{\bar{x}}$ अथवा $\frac{M.D._{(Median)}}{Median}$

इसलिए, यदि माध्य के आधार पर माध्य विचलन का परिकलन होता है तो इसे माध्य द्वारा विभाजित करते हैं। यदि माध्य विचलन के परिकलन हेतु मध्यिका प्रयुक्त होता है तो इसे मध्यिका द्वारा विभाजित किया जाता है।

मानक विचलन के लिए सापेक्ष माप को विचरण गुणांक कहा जाता है, जिसका परिकलन आगे दिया गया है।

विचरण गुणांक $\frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समान्तर माध्य}} \times 100$

इसे प्रायः प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है और परिक्षेपण का यह सर्वाधिक प्रयुक्त होने वाला सापेक्ष माप है। चूँकि सापेक्ष माप उन इकाइयों से मुक्त होते हैं, जिनमें मान व्यक्त किए गए हों, अतः इनकी तुलना विभिन्न इकाइयों में व्यक्त विभिन्न समूहों से भी की जा सकती है।

5. लारेंज वक्र (Lorenz Curve)

अब तक चर्चित परिक्षेपण के माप, परिक्षेपण का एक संख्यात्मक मान देते हैं। वितरण में असमानता के अनुमान के लिए एक आरेखी माप जिसे लारेंज वक्र कहा जाता है, भी उपलब्ध है। आपने ऐसे वक्तव्य सुने होंगे, जैसे देश के शीर्ष 10% लोग देश की 50% राष्ट्रीय आय अर्जित करते हैं, जबकि शीर्ष 20% लोग 80% आय। इन संख्याओं से आय वितरण की असमानता के बारे में अनुमान प्राप्त होता हैं। लारेंज वक्र का प्रयोग संचयी रूप में व्यक्त सूचनाओं की असमानता की मात्रा को दर्शाने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए, आय की लारेंज वक्र आबादी के प्रतिशत और उसकी कुल आय के भाग में संबंध बताती है। यह दो या दो से अधिक वितरणों की परिवर्तनशीलता की तुलना में विशेष उपयोगी है, जिसे दो या दो से अधिक लारेंज वक्र एक ही अक्ष पर बनाकर तुलना की जा सकती है।

सारणी 6.4

आय वर्ग	मध्य बिंदु *(X)*	वर्ग की बारंबारता *(f)*	कुल आय	बारंबारता का प्रतिशत	कुल आय का प्रतिशत
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0-5000	2500	5	12500	10.00	1.29
5000-10000	7500	10	75000	20.00	7.71
10000-20000	15000	18	270000	36.00	27.76
20000-40000	30000	10	300000	20.00	30.85
40000-50000	45000	7	315000	14.00	32.39
योग		**50**	**972500**	**100.00**	

सारणी 6.5

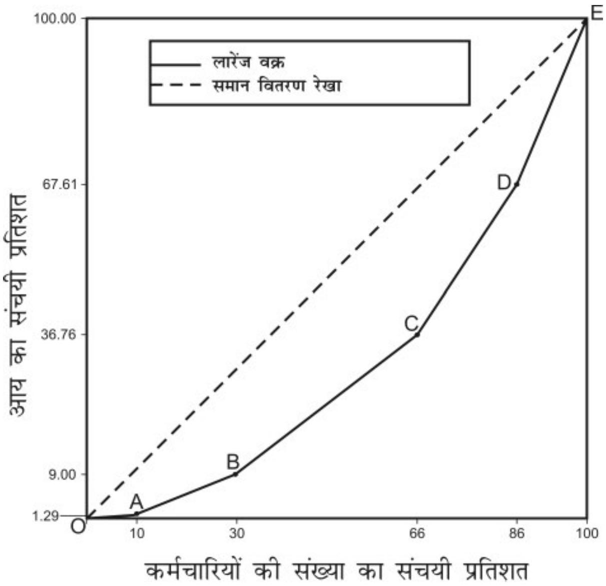
'से कम' संचयी बारंबारता एवं आय

से कम (रु)	संचयी बारंबारता(%)	संचयी आय (%)
5,000	10	1.29
10,000	30	9.00
20,000	66	36.76
40,000	86	67.61
50,000	100	100.00

लारेंज वक्र का निर्माण

निम्न चरण अपनाना आवश्यक है-

1. तालिका 6.4 के स्तंभ 2 को ज्ञात करने के लिए, वर्गों के मध्य बिंदुओं का परिकलन कीजिए।
2. प्रत्येक वर्ग के मध्य बिंदुओं को, वर्ग की बारंबारता से गुणा करके, कर्मचारियों की प्रत्येक वर्ग में अनुमानित कुल आय का परिकलन कीजिए। इस प्रकार तालिका 6.4 के कॉलम (4) को ज्ञात कीजिए।
3. प्रत्येक वर्ग की बारंबारता को, कुल बारंबारताओं के प्रतिशत में व्यक्त कीजिए। इस प्रकार तालिका 6.4 के स्तंभ (5) को ज्ञात कीजिए।
4. प्रत्येक वर्ग की कुल आय को, सभी वर्गों की कुल आय के समग्र योग के प्रतिशत में व्यक्त कीजिए। इस प्रकार तालिका 6.4 के स्तंभ (6) को ज्ञात कीजिए।
5. 'से कम' संचयी बारंबारता और संचयी आय ज्ञात कीजिए (तालिका 6.5)।
6. तालिका 6.5 क स्तंभ (2), कर्मचारियों की संचयी बारंबारता प्रदर्शित करता है।
7. तालिका 6.5 का स्तंभ (3) इन व्यक्तियों को प्राप्त आय को दिखाता है।
8. निर्देशांक (0,0) को (100,100) से जोड़ते हुए एक रेखा खींचिए। इसे 'सम वितरण की रेखा' कहा जाता है, जिसे OE रेखा द्वारा चित्र 6.1 में दिखाया गया है।
9. कर्मचारियों के संचयी प्रतिशतों को क्षैतिज अक्ष पर तथा संचयी आय को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दिखाइए। इस प्रकार हम इस रेखा को प्राप्त कर सकते हैं।



चित्र 6.1

लारेंज वक्र का अध्ययन

OE को सम वितरण की रेखा कहा जाता है, चूँकि यह ऐसी स्थिति में लागू होता है, जहाँ शीर्ष 20% लोग कुल आय का 20% अर्जित करते हैं और शीर्ष 60% कुल आय का 60% अर्जित करते हैं। OABCDE वक्र इस रेखा से जितना अधिक दूर होता है वितरण में उतनी ही अधिक असमानता होती है। यदि यहाँ पर दो या इससे अधिक वक्र हैं, तो वह वक्र जो OE रेखा से जितना अधिक दूर होगा, उसमें उतनी ही अधिक असमानता होगी।

8. सारांश

यद्यपि परास समझने तथा परिकलन के लिए सबसे सरल है, लेकिन यह चरम मानों से अनुचित रूप से प्रभावित होता है। चतुर्थक विचलन चरम मानों से प्रभावित नहीं होता है, क्योंकि वह आँकड़ों के केवल मध्यवर्ती 50% आँकड़ों पर आधारित

होता है। परंतु, चतुर्थक विचलन का निर्वचन बहुत कठिन होता है। माध्य विचलन और मानक विचलन दोनों ही मानों के अपने औसत से विचलनों पर आधारित होते हैं। माध्य विचलन औसत से विचलनों के औसत को परिकलित करता है, लेकिन विचलन के चिन्हों की (ऋणात्मक तथा धनात्मक) उपेक्षा करता है। इसी कारण यह अंगणितीय प्रतीत होता है। मानक विचलन माध्य से औसत विचलन के परिकलन का प्रयास करता है। माध्य विचलन की भाँति यह सभी मानों पर आधारित होता है एवं इसका प्रयोग उच्चतर सांख्यिकीय समस्याओं में भी होता है। यह परिक्षेपण के माप के लिए सामान्य रूप से प्रयुक्त होता है।

पुनरावर्तन

- परिक्षेपण का माप किसी आर्थिक चर के व्यवहार के बारे में हमारे ज्ञान में वृद्धि करता है।
- परास तथा चतुर्थक विचलन मानों के प्रसरण पर आधारित होते हैं।
- माध्य विचलन तथा मानक विचलन औसत से मानों के विचलनों पर आधारित होते हैं।
- परिक्षेपण के माप निरपेक्ष या सापेक्ष हो सकते हैं।
- निरपेक्ष मापों का उत्तर उन्हीं इकाइयों में होता है, जिसमें आँकड़ों को व्यक्त किया गया है।
- सापेक्ष माप उन इकाइयों से मुक्त होते हैं, जिनमें आँकड़े व्यक्त किए जाते हैं और इसीलिए ये विभिन्न चरों की तुलना करने के लिए प्रयुक्त किए जा सकते हैं।
- वक्र के आकार में परिक्षेपण अनुमान प्रस्तुत करने वाली आरेखीय विधि को लारेंज वक्र कहते हैं।

अभ्यास

1. 'किसी बारंबारता वितरण के समझने में परिक्षेपण का माप केंद्रीय मान का एक अच्छा संपूरक है', टिप्पणी करें।
2. परिक्षेपण का कौन सा माप सर्वोत्तम है और कैसे?
3. 'परिक्षेपण के कुछ माप मानों के प्रसरण पर निर्भर करते हैं, लेकिन कुछ, केंद्रीय मान से मानों के विचरण के आधार पर परिकलित किए जाते हैं।' क्या आप सहमत हैं?
4. एक कस्बे में, 25% लोग रु० 45,000 से अधिक आय अर्जित करते हैं, जबकि 75% लोग 18,000 से अधिक अर्जित करते हैं। परिक्षेपण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष मानों का परिकलन कीजिए।
5. एक राज्य के 10 जिलों की प्रति एकड़ गेहूँ व चावल फसल की उपज निम्नवत् हैः

जिले	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
गेहूँ	12	10	15	19	21	16	18	9	25	10
चावल	22	29	12	23	18	15	12	34	18	12

प्रत्येक फसल के लिए परिकलन करें,

(क) परास

(ख) चतुर्थक विचलन

(ग) माध्य से माध्य विचलन

(घ) मध्यिका से माध्य विचलन

(ड़) मानक विचलन

(च) किस फसल में अधिक विचरण है?

(छ) प्रत्येक फसल के लिए विभिन्न मापों के मानों की तुलना कीजिए।

6. पूर्ववर्ती प्रश्न में, विचरण के सापेक्ष मापों को परिकलित कीजिए और वह मान बताइए जो आपके विचार से सर्वाधिक विश्वसनीय हो।

7. किसी क्रिकेट टीम के लिए एक बल्लेबाज का चयन करना है। यह चयन x और y के बीच पाँच पूर्ववर्ती टेस्टों के स्कोर के आधार पर करना है, जो निम्नवत् हैंः

x	25	85	40	80	120
y	50	70	65	45	80

किस बल्लेबाज को टीम में चुना जाना चाहिए?

(क) अधिक रन स्कोर करने वाले को, या

(ख) अधिक भरोसेमंद बल्लेबाज को।

8. दो ब्रांडों के बल्बों की गुणवत्ता जाँचने के लिए, ज्वलन अवधि घंटों में उनके जीवन काल को, प्रत्येक ब्रांड के 100 बल्बों के आधार पर निम्नानुसार अनुमानित किया गया हैः

जीवन काल	बल्बों की संख्या	
(घंटों में)	ब्रांड क	ब्रांड ख
0- 50	15	2
50-100	20	8
100-150	18	60
150-200	25	25
200-250	22	5
	100	100

(क) किस ब्रांड का जीवन काल अधिक है?
(ख) कौन सा ब्रांड अधिक भरोसेमंद है?

9. एक कारखाने के 50 मजदूरों की औसत दैनिक मजदूरी 200 रु. तथा मानक विचलन 40 रु० था। प्रत्येक मजदूर की मजदूरी में 20 रु. की वृद्धि की गई। अब मजदूरों की औसत दैनिक मजदूरी एवं मानक विचलन क्या है? क्या मजदूरी में समानता आई है?

10. पूर्ववर्ती प्रश्न में, यदि प्रत्येक मजदूर की मजदूरी में 10% की वृद्धि की जाए, तो माध्य एवं मानक विचलन पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

11. निम्नलिखित वितरण के लिए, माध्य से माध्य विचलन और मानक विचलन का परिकलन कीजिए।

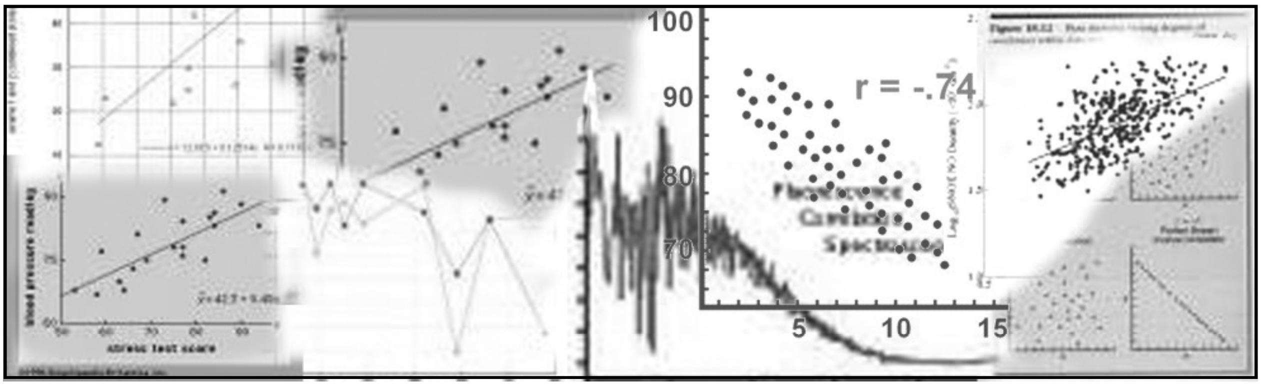
वर्ग	बारंबारता
20- 40	3
40- 80	6
80-100	20
100-120	12
120-140	9
	50

12. 10 मानों का योग 100 है और उनके वर्गों का योग 1090 है। विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए।

11099CH07

अध्याय 7

सहसंबंध



इस अध्याय का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य होंगे किः

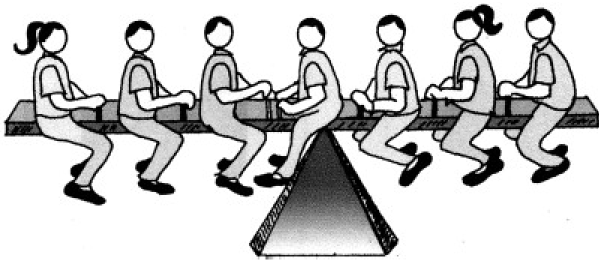
- सहसंबंध का अर्थ समझ सकें;
- दो चरों के बीच संबंध के स्वरूप को समझ सकें;
- सहसंबंध के विभिन्न मापों का परिकलन कर सकें;
- संबंध की कोटि और दिशा का विश्लेषण कर सकें।

1. प्रस्तावना

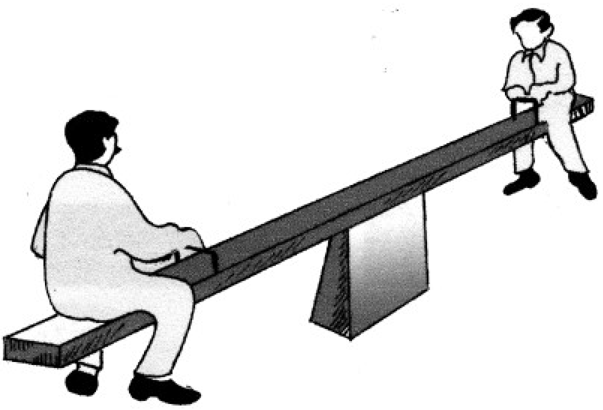
पिछले अध्याय में आपने सीखा कि आँकड़ों के समूह तथा सर्वसम चरों में परिवर्तनों का संक्षिप्त माप कैसे प्राप्त किया जाए। अब आप यह सीखेंगे कि दो चरों के बीच के संबंध का परीक्षण कैसे करें।

जैसे-जैसे गर्मी में तापमान बढ़ता है, पर्वतीय स्थलों पर सैलानियों की भीड़ बढ़ने लगती है। आइसक्रीम की बिक्री तेजी से बढ़ने लगती है। इस प्रकार, तापमान का संबंध सैलानियों की संख्या एवं आइसक्रीम की बिक्री से हो जाता है। ठीक इसी प्रकार, जब स्थानीय मंडी में टमाटर की पूर्ति बढ़ जाती है, तो उसकी कीमत कम हो जाती है। जब स्थानीय फसल तैयार होकर बाजार में पहुँचने लगती है तो टमाटरों की कीमत सामान्य पहुँच के बाहर की 40 रु प्रति किलो से घटकर 4 रु प्रति किलो या और भी कम हो जाती है। अतः पूर्ति का संबंध कीमत से रहता है। सहसंबंध का विश्लेषण ऐसे संबंधों के क्रमबद्ध परीक्षण का एक साधन है। यह निम्नलिखित प्रश्नों के समाधान करता हैः

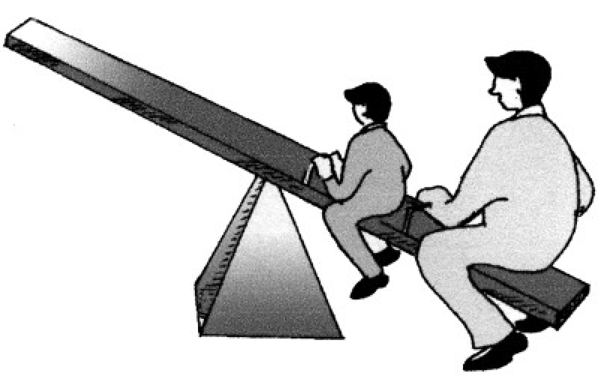
- क्या दो चरों का आपस में कोई संबंध है?



- यदि एक चर का मान बदलता है तो क्या दूसरे का मान भी बदल जाता है?



- क्या दोनों चरों में समान दिशा में परिवर्तन होता है?



- उनका यह संबंध कितना घनिष्ठ (पक्का) है?

2. **संबंधों के प्रकार**

आइए, पहले विभिन्न प्रकार के संबंधों पर विचार करें। माँगी गई मात्रा तथा किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन का संबंध माँग के सिद्धांत का अभिन्न अंग है। इसके बारे में आप विस्तार से कक्षा XII में पढ़ेंगे। कृषि उत्पादकता की कमी का संबंध बारिश की कमी से रहता है। संबंधों के इस प्रकार के उदाहरणों को कारण और परिणाम के रूप में समझा जा सकता है। अन्य उदाहरण संयोग मात्र हो सकते हैं। किसी पक्षी-विहार में प्रवासी पक्षियों के आने के साथ उस क्षेत्र में जन्म-दरों के संबंध को कारण-परिणाम संबंध का नाम नहीं दिया जा सकता। ऐसे संबंध संयोग-मात्र हैं। आपके जूते की माप और आपकी जेब में पैसों का संबंध भी संयोग का ही एक उदाहरण है, यदि इनके बीच कोई संबंध हो भी, तो उसकी व्याख्या करना कठिन होता है।

एक अन्य उदाहरण में, दो चरों पर तीसरे चर के प्रभाव से, दोनों चरों के बीच के संबंध प्रभावित हो सकते हैं। आइसक्रीम की बिक्री में तेजी डूबकर मरने वालों की संख्या से जोड़ी जा सकती है, यद्यपि मरने वाले आइसक्रीम खाकर नहीं डूबे थे। तापमान के बढ़ने के कारण ही आइसक्रीम की बिक्री में तेजी आती है। साथ ही, गर्मी से राहत पाने के लिए लोग अधिक संख्या में तरणतालों में जाने लगते हैं। संभवतः डूब कर मरने वालों की संख्या इसी कारण बढ़ गई हो। इस प्रकार, आइसक्रीम की बढ़ती हुई बिक्री और डूबने से मरने वालों की संख्या के बीच उच्च सहसंबंध का कारण तापमान है।

सहसंबंध किसका मापन करता है?

सहसंबंध चरों के बीच संबंधों की गहनता एवं दिशा का अध्ययन एवं मापन करता है। सहसंबंध सह-प्रसरण का मापन करता है न कि कार्य-कारण संबंध का। सहसंबंध को कार्य-कारण संबंध के रूप

में नहीं समझा जाना चाहिए। दो चरों x और y के बीच सहसंबंध की उपस्थिति का अर्थ है कि जब एक चर का मान किसी दिशा में बदलता है तो दूसरे चर का मान या तो उसी दिशा में बदलता है (अर्थात् (धनात्मक परिवर्तन) या फिर विपरीत दिशा में (अर्थात् ऋणात्मक परिवर्तन)। परंतु, यह एक निश्चित ढंग से होता है। इसे आसानी से समझने के लिए, यहाँ हम मान लें कि सहसंबंध, यदि है, तो रेखीय है, अर्थात दो चरों की सापेक्ष गति को ग्राफ पेपर पर एक सीधी रेखा द्वारा दिखाया जा सकता है।

सहसंबंध के प्रकार

सहसंबंध को आमतौर पर धनात्मक या ऋणात्मक सहसंबंध के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। जब चरों की गति एक ही दिशा में एक साथ होती है तो सहसंबंध को धनात्मक कहा जाता है। जब आय बढ़ती है तो उपभोग में भी वृद्धि होती है। अब आय में कमी होती है तो उपभोग भी कम हो जाता है। आइसक्रीम की बिक्री तथा तापमान दोनों एक ही दिशा में गतिमान हैं। जब चर विपरीत दिशा में गतिमान हों तो सहसंबंध ऋणात्मक कहलाता है। जब सेबों की कीमत में गिरावट आती हैं तो उनकी माँग बढ़ जाती है और जब कीमत बढ़ती है तो माँग कम हो जाती हैं। जब आप पढ़ाई में अधिक समय लगाते हैं तो आपके अनुत्तीर्ण होने की संभावना कम हो जाती है और जब पढ़ाई में कम समय लगाते हैं तो अनुत्तीर्ण होने की संभावना बढ़ जाती है। ये ऋणात्मक सहसंबंध के उदाहरण हैं। यहाँ चरों की गति विपरीत दिशाओं में होती है।

3. सहसंबंध को मापने की प्रविधियाँ

सहसंबंध को मापने के लिए ये महत्वपूर्ण सांख्यिकीय उपकरण हैंः प्रकीर्ण आरेख, कार्ल पियरसन का सहसंबंध गुणांक तथा स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध।

प्रकीर्ण आरेख साहचर्य के स्वरूप को कोई विशिष्ट संख्यात्मक मान दिए बिना दृश्य रूप में प्रस्तुत करता है। कार्ल पियरसन का सहसंबंध-गुणांक दो चरों के बीच के रेखीय संबंधों का संख्यात्मक मापन करता है। संबंध को तब रेखीय कहा जाता है, जब इसे एक सीधी रेखा द्वारा प्रस्तुत किया जा सके। स्पीयरमैन का सहसंबंध गुणांक व्यष्टिगत मदों के बीच उनके गुणों के आधार पर निर्धारित कोटियों के द्वारा रेखीय सहसंबंध को मापा जाता है। गुण वे चर हैं, जिनका संख्यात्मक मापन संभव नहीं जैसे लोगों का बौद्धिक स्तर, शारीरिक रूप-रंग तथा ईमानदारी आदि।

प्रकीर्ण आरेख (Scatter Diagram)

प्रकीर्ण आरेख, किसी संख्यात्मक मान के बिना, संबंधों के स्वरूप की जाँच दृश्य रूप में प्रस्तुत करने की एक उपयोगी प्रविधि है। इस प्रविधि में, दो चरों के मान को ग्राफ पेपर पर बिंदुओं के रूप में आलेखित किया जाता है। प्रकीर्ण आरेख के द्वारा संबंधों के स्वरूप को काफी सही रूप में जाना जा सकता है। प्रकीर्ण आरेख में प्रकीर्ण बिंदुओं के सामीप्य की कोटि और उनकी व्यापक दिशा के आधार पर उनके आपसी संबंधों की जानकारी प्राप्त की जा सकती है। यदि सभी बिंदु एक ही रेखा पर होते हैं तो सहसंबंध परिपूर्ण होता है एवं एक (1) के बराबर होता है। यदि प्रकीर्ण बिंदु सरल रेखा के चारों तरफ फैले हुए होते हैं तो सहसंबंध निम्न माना जाता है। सहसंबंध को तब रेखीय कहा जाता है जब प्रकीर्ण बिंदु एक रेखा पर हों या रेखा के निकट हों।

प्रकीर्ण आरेख, आरेख 7.1 से 7.5 तक दिखाए गए हैं। ये हमेशा चरों के बीच के संबंधों के बारे में जानकारी देते हैं। आरेख 7.1 में प्रकीर्णन ऊपर की ओर बढ़ती हुई रेखा के आस-पास दिखाया गया है, जो एक ही दिशा में चरों के गतिमान होने का संकेत देता है। जब X बढ़ता है तो Y भी बढ़ता

है, जो धनात्मक सहसंबंध दर्शाता है। आरेख 7.2 में सारे बिंदु नीचे की ओर ढलती रेखा के आस-पास बिखरे हुए हैं। इस बार चर विपरीत दिशा में आगे बढ़ रहे हैं। जब X बढ़ता है तो Y घटता है और Y के बढ़ने पर X घटता है। यह ऋणात्मक सहसंबंध दर्शाता है। चित्र 7.3 में न तो ऐसी ऊपर उठती रेखा है और न नीचे गिरती हुई रेखा, जिनके आसपास ये बिंदु फैले हों। यह सहसंबंध न होने का उदाहरण है। आरेख 7.4 तथा 7.5 में ये बिंदु न तो ऊपर उठती रेखा के चारों ओर फैले दिखाई देते है और न नीचे गिरती रेखा के चारों ओर। ये बिंदु स्वयं रेखाओं पर ही स्थित हैं। इन्हें क्रमशः पूर्ण धनात्मक सहसंबंध तथा पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहा जाता है। प्रकीर्ण आरेख का सावधानीपूर्वक प्रेक्षण करने से हमें संबंधों की गहनता एवं स्वरूप की जानकारी प्राप्त होती है।

क्रियात्मक गतिविधि

- अपनी कक्षा के छात्रों के कद, वजन तथा उनके द्‌वारा दसवीं कक्षा के दो विषयों में प्राप्त अंकों के आँकड़े संगृहीत करें। इनमें से एक बार में दो चरों को लेकर उनका प्रकीर्ण आरेख बनाएँ। आप उनमें किस प्रकार का सहसंबंध देखते हैं?

कार्ल पियरसन का सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

इसे गुणन आघूर्ण सहसंबंध (Product Moment Correlation) तथा सरल सहसंबंध गुणांक के नामों से भी जाना जाता है। यह दो चरों X एवं Y के बीच रेखीय संबंधों के सही संख्यात्मक मान की कोटि दर्शाता है।

यह ध्यान देना महत्वपूर्ण है कि कार्ल पीयरसन के सहसंबंध गुणांक को तभी उपयोग में लाना चाहिए जब चरों के बीच रेखीय संबंध हो। जब X और Y के बीच गौर-रेखीय संबंध हो। जब X और Y के बीच गैर-रेखीय संबंध होता है तो कार्ल पीयरसन सहसंबंध की गणना भ्रामक हो सकती है। अतः यदि सही संबंध रेखीय प्रकार का है, जैसा कि चित्र 7.1, 7.2, 7.4 तथा 7.5 के प्रकीर्ण आरेखों द्‌वारा दर्शाया गया है, तो कार्ल पीयरसन के सहसंबंध का आगणन किया जाना चाहिए और तब यह हमको दो चरों के बीच संबंधों की गहनता को बताएगा। परंतु, यदि सही संबंध इस प्रकार का है जैसा कि चित्र 7.6 अथवा 7.7 के प्रकीर्ण आरेखों द्‌वारा दिखाया गया है, तो इसका अर्थ है कि X तथा Y के बीच गैर-रेखीय संबंध है तथा हमको कार्ल पीयरसन के सहसंबंध गुणांक का उपयोग करने का प्रयास नहीं करना चाहिए।

अतः यह उचित है कि पहले चरों के बीच संबंध के प्रकीर्ण चित्र की कार्ल पीयरसन के सहसंबंध गुणांक की गणना से पूर्व, जाँच की जाए।

मान लें कि $X_1, X_2, \ldots, X_N$ आदि X के N मान हैं तथा $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ Y के संगत मान हैं। आगे की प्रस्तुतियों में सरलता की दृष्टि से इकाइयों को दर्शाने वाले पादांकों को छोड़ दिया गया है। X तथा Y के समांतर माध्य को इस प्रकार परिभाषित किया गया हैः

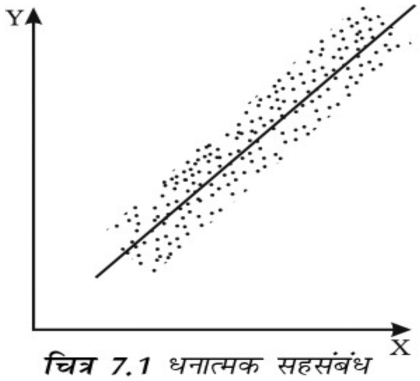
$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}; \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$$

और उनके प्रसरण निम्नलिखित हैंः

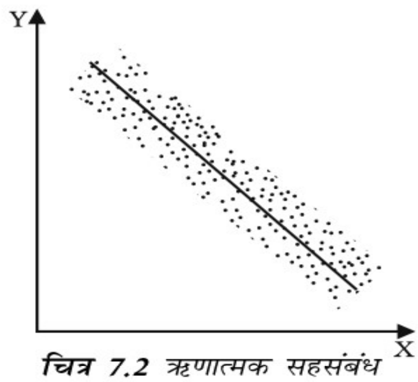
$$\sigma^2{}_x = \frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N} = \frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2$$

तथा $$\sigma^2{}_y = \frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N} = \frac{\Sigma Y^2}{N} - \bar{Y}^2$$

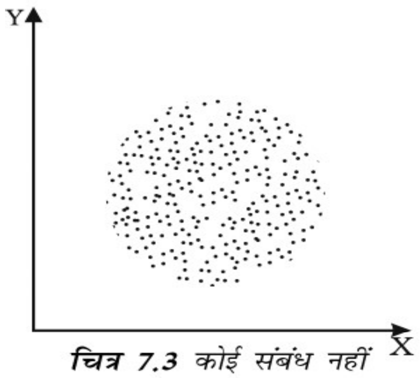
यहाँ, X एवं Y के मानक विचलन क्रमशः उनके प्रसरण के धनात्मक वर्गमूल हैं। X तथा Y के सहप्रसरण निम्नलिखित हैंः



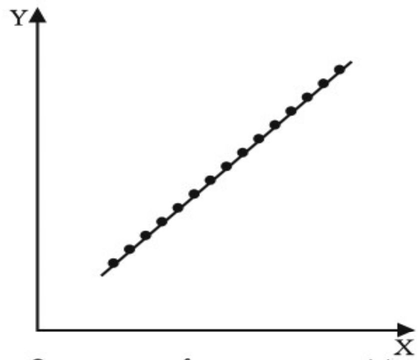
चित्र 7.1 धनात्मक सहसंबंध



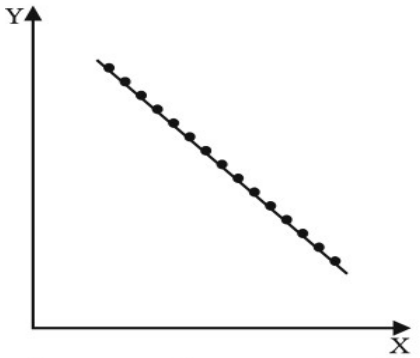
चित्र 7.2 ऋणात्मक सहसंबंध



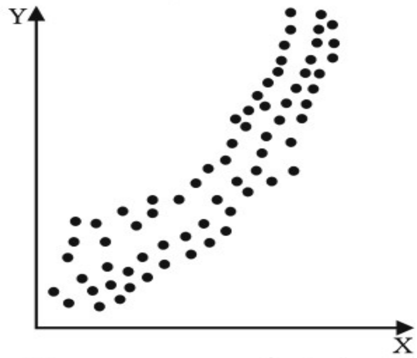
चित्र 7.3 कोई संबंध नहीं



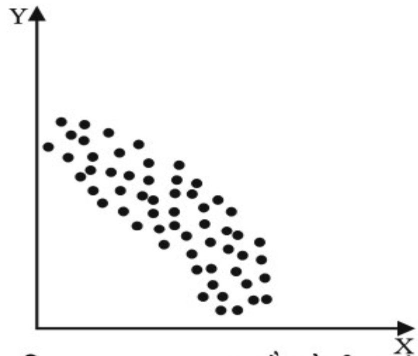
चित्र 7.4 पूर्ण धनात्मक सहसंबंध



चित्र 7.5 पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध



चित्र 7.6 धनात्मक गैर-रेखीय संबंध



चित्र 7.7 ऋणात्मक गैर-रेखीय संबंध

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N} = \frac{\Sigma xy}{N}$$

जहाँ $x = X - \bar{X}$ तथा $y = Y - \bar{Y}$।

ये X तथा Y के माध्य मानों से उनके i वें मान के विचलन हैं।

X और Y के बीच सहप्रसरण का चिह्न सहसंबंध गुणांक के चिह्न का निर्धारण करता है। मानक विचलन हमेशा धनात्मक होते हैं। यदि सहप्रसरण शून्य होता है, तो सहसंबंध गुणांक भी सदैव शून्य होता है। गुणन आघूर्ण सहसंबंध या कार्ल पियरसन का सहसंबंध मापन नीचे दिया जा रहा है,

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y} \qquad ...(1)$$

या

$$r = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}} \qquad ...(2)$$

या

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}} \quad ...(3)$$

या

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}} ...(4)$$

सहसंबंध गुणांक के गुण

सहसंबंध गुणांक के गुण निम्नलिखित हैं:

- r की कोई इकाई नहीं होती। यह एक संख्या-मात्र है। इसका तात्पर्य है कि माप की इकाइयाँ r का हिस्सा नहीं हैं। उदाहरण के लिए, कद (फुटों में) तथा वजन (कि.ग्रा. में) के बीच r है 0.7।
- r का ऋणात्मक मान प्रतिलोम संबंध दर्शाता है। किसी चर में बदलाव, दूसरे चर में विपरीत दिशा में बदलाव के साथ संबद्ध रहता है। जब एक वस्तु की कीमत बढ़ती है तो उसकी माँग घट जाती है। जब ब्याज दर बढ़ती है तो निधियों (ब्याज पर ली जाने वाली धन-राशियाँ) की माँग घट जाती है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि निधियाँ महँगी हो जाती हैं।

- यदि r धनात्मक होता है तो दोनों चर एक ही दिशा में गतिमान होते हैं। जब चाय के स्थानापन्न के रूप में कॉफी के दाम बढ़ते हैं, तो चाय की माँग भी बढ़ जाती है। सिंचाई व्यवस्था के सुधार का संबंध फसलों की अधिक पैदावार से रहता है। जब तापमान में वृद्धि होती है, तो आइसक्रीम की बिक्री बढ़ जाती है।
- सहसंबंध गुणांक का मान -1 तथा +1 के बीच स्थित होता है $-1 \leq r \leq +1$। यदि किसी भी अभ्यास में r का मान इस परास के बाहर होता है तो इससे परिकलन में त्रुटि का संकेत मिलता है।
- 'r' परिमाण, उद्गम और पैमाने के परिवर्तन से अप्रभावित होता है। यदि हमें दो चर X तथा Y दिए गए हों तो दो नए चरों को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है-

$$U = \frac{X-A}{B} \quad ; \qquad V = \frac{Y-C}{D}$$

यहाँ पर A तथा C क्रमशः X तथा Y के कल्पित मान हैं। B तथा D समापवर्तक हैं और इनका समान उद्गम है।
अतः
$r_{xy} = r_{uv}$

अति सरल प्रकार से, सहसंबंध गुणांक की गणना में, पद विचलन पद्धति की भाँति, इस गुण का उपयोग किया जाता है।

- $r = 0$, तो इसका अर्थ है कि दो चरों में सह संबंध नहीं है। उनके बीच कोई रेखीय संबंध नहीं है। वैसे, अन्य प्रकार के संबंध हो सकते हैं।
- $r = 1$ अथवा $r = -1$, तो इसका अर्थ है कि सहसंबंध पूर्ण है और चरों के बीच सटीक रेखीय संबंध है।
- r के मान का होना, घनिष्ठ रेखीय संबंध को इंगित करता है। इसके मान को उच्च तब कहा जाता है जब यह +1 अथवा -1 के निकट होता है।
- r का निम्न मान (शून्य के निकट), मंद रेखीय संबंध को इंगित करता है, परंतु गैर-रेखीय संबंध पाया जा सकता है।

हमने पहले अध्याय में चर्चा की है कि सांख्यिकीय विधियाँ व्यवहार बुद्धि का स्थानापन्न नहीं हैं। एक अन्य उदाहरण लेते हैं, जो सहसंबंध के परिकलन और व्याख्या से पहले आँकड़ों की विशेषताओं को समझने की आवश्यकता पर प्रकाश डालता है। कुछ गाँवों में महामारी फैलती है और सरकार प्रभावित गाँवों में डॉक्टरों का दल भेजती है। गाँव में होने वाली मौतों की संख्या तथा भेजे गए डॉक्टरों की संख्या के बीच धनात्मक सहसंबंध पाया गया। (अर्थात् डॉक्टरों की संख्या बढ़ने से मौतें बढ़ गईं)। सामान्यतः डॉक्टरों द्वारा उपलब्ध कराई जानेवाली सेवाओं के परिणामस्वरूप मृत्यु दर में कमी की आशा की जाती है, अर्थात् इनके बीच ऋणात्मक सहसंबंध होता है। यदि ऐसा नहीं हुआ, तो इसके पीछे अन्य कारण रहे होंगे। आँकड़े, संभवतः, किसी अवधि-विशेष से संबंधित होंगे या फिर, दर्ज की गई मृत्यु दर संभवतः ऐसे व्यक्तियों के बारे में हो सकती है जिनकी दशा बहुत बिगड़ चुकी थी। साथ ही, किसी भी क्षेत्र में डाक्टरों की उपस्थिति का सुपरिणाम कुछ समय बीतने के बाद ही दिखाई देता है। यह भी संभव है कि दर्ज की गई मौतें महामारी के कारण हुई ही न हों। जैसे, सुनामी ने अचानक किसी देश में अपना भयंकर रूप दिखाया हो और मृत्यु-दर बढ़ गई हो।

आइए, किसानों द्वारा विद्यालय में बिताए गए वर्षों तथा प्रति एकड़ वार्षिक उपज के बीच के संबंध के परीक्षण के द्वारा r के परिकलन को सोदाहरण स्पष्ट करें:

उदाहरण 1

किसानों द्वारा विद्यालय में बिताए गए वर्ष	प्रति एकड़ वार्षिक उपज ('000 रु में)
0	4
2	4
4	6
6	10
8	10
10	8
12	7

सूत्र 1 के लिए $\Sigma xy, \sigma_x, \sigma_y$ के मानों की आवश्यकता है। सारणी 7.1 के द्वारा हम इन मान को प्राप्त कर सकते हैं।

$\Sigma xy = 42,$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{112}{7}},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{38}{7}}$$

इन मानों को सूत्र 1 में प्रतिस्थापित करने पर,

$$r = \frac{42}{7\sqrt{\frac{112}{7}}\ \sqrt{\frac{38}{7}}} = 0.644$$

सूत्र 2 के द्वारा भी इन्हीं मानों को प्राप्त किया जा सकता है,

$$r = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X - \overline{X})^2}\ \sqrt{\sum (Y - \overline{Y})^2}} \qquad ...(2)$$

$$r = \frac{42}{\sqrt{112}\ \sqrt{38}} = 0.644$$

इस प्रकार, हमने देखा कि किसानों की शिक्षा के वर्ष तथा प्रति एकड़ उपज के बीच धनात्मक सहसंबंध है। साथ ही r का मान भी अधिक है। इससे पता चलता है कि किसान जितने अधिक वर्षों तक शिक्षा ग्रहण करेंगे, प्रति एकड़ उपज उतनी ही अधिक होगी। इससे किसानों के लिए शिक्षा के महत्त्व पर प्रकाश पड़ता है।

सूत्र (3) का प्रयोग करने पर

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\ \sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}} \qquad ...(3)$$

इस सूत्र के प्रयोग के लिए हमें निम्नलिखित व्यंजकों का परिकलन करना होगा,

$$\Sigma XY, \Sigma X^2, \Sigma Y^2.$$

अब r का मूल्य जानने के लिए सूत्र (3) का प्रयोग करें।

आइए, अब r के मान की विभिन्न व्याख्याओं की जानकारी लें। मान लें कि अंग्रेजी तथा सांख्यिकी इन दोनों विषयों के प्राप्तांकों के बीच सहसंबंध 0.1 है। इसका अर्थ है कि इन दोनों विषयों में प्राप्त किए गए अंकों में धनात्मक सहसंबंध है एवं सहसंबंध की प्रबलता कमजोर है। अंग्रेजी में अधिक अंक प्राप्त करने वाले छात्र सांख्यिकी में अपेक्षाकृत कम अंक प्राप्त कर सकते हैं। यदि r का मान 0.9 होता, तो अंग्रेजी में अधिक प्राप्तांक वाले विद्यार्थियों ने निश्चित रूप से सांख्यिकी में अधिक अंक प्राप्त किए होते।

सारणी 7.1

किसानों की शिक्षा के वर्ष एवं प्रति एकड़ पैदावार के बीच r का परिकलन

शिक्षा के वर्ष (x)	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$	प्रति एकड़ वार्षिक पैदावार '000 रु (Y)	$(Y-\overline{Y})$	$(Y-\overline{Y})^2$	$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$
0	-6	36	4	-3	9	18
2	-4	16	4	-3	9	12
4	-2	4	6	-1	1	2
6	0	0	10	3	9	0
8	2	4	10	3	9	6
10	4	16	8	1	1	4
12	6	36	7	0	0	0
$\Sigma X=42$		$\Sigma (X-\overline{X})^2=112$	$\Sigma Y=49$		$\Sigma (Y-\overline{Y})^2=38$	$\Sigma (X-\overline{X})(Y-\overline{Y})=42$

ऋणात्मक सहसंबंध के एक उदाहरण के रूप में स्थानीय मंडी में सब्जियों के आगमन के साथ उनकी कीमत के संबंध को लिया जा सकता है। यदि r = -0.9 होता, तो स्थानीय मंडी में सब्जियों की पूर्ति बढ़ने के साथ इनकी कीमत कम होगी। यदि r = -0.1 होता तो भी सब्जियों की अधिक पूर्ति के साथ इनकी कीमतें कम तो होतीं, परंतु उतनी कम नहीं जितनी तब थीं, जब r = -0.9 था। कीमत में किस हद तक गिरावट होगी इसका संबंध r के निरपेक्ष मान के साथ है। यदि r = 0 होगा, तो बाजार में पूर्ति के काफी बढ़ने पर भी, कीमत में कोई कमी नहीं होती। ऐसी भी संभावना है कि पूर्ति के बढ़ने पर कुशल परिवहन तंत्र की सहायता से इन्हें अन्य बाजारों में ले जाया गया हो।

क्रियात्मक गतिविधि

- निम्नलिखित सारणी को देखें। वर्तमान कीमत पर राष्ट्रीय आय में वार्षिक वृद्धि तथा (सकल घरेलू उत्पाद के प्रतिशत के रूप में) सकल घरेलू बचत के बीच r का परिकलन कीजिए।

सारणी 7.2

वर्ष	राष्ट्रीय आय की वार्षिक वृद्धि	सकल घरेलू बचत GDP के प्रतिशत के रूप में
1992-93	14	24
1993-94	17	23
1994-95	18	26
1995-96	17	27
1996-97	16	25
1997-98	12	25
1998-99	16	23
1999-00	11	25
2000-01	8	24
2001-02	10	23

स्रोतः आर्थिक सर्वेक्षण, (2004-05) पृष्ठ 8, 9

सहसंबंध गुणांक के परिकलन में पद-विचलन विधि

जब चरों के मान ऊँचे हों, तो परिकलन की समस्या को r के एक गुण के प्रयोग द्वारा कम किया जा सकता है। यह गुण है कि r 'उद्‌गम परिवर्तन' तथा 'स्केल परिवर्तन' से प्रभावित नहीं होता है। इसे पद विचलन विधि के रूप में भी जाना जाता है। इसके अंतर्गत X एवं Y चरों को निम्नलिखित पद विचलन विधि से परिवर्तित किया जा सकता हैः

$$U=\frac{X-A}{B};V=\frac{Y-C}{D}$$

यहाँ A तथा B कल्पित माध्य हैं तथा h एवं k समापवर्तक हैं एवं एक ही चिह्न के हैं।

अतः $r_{UV} = r_{XY}$

इसे कीमत सूचकांक तथा धन की पूर्ति के बीच सहसंबंध के विश्लेषण की प्रक्रिया के द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 2

कीमत सूचकांक (X)	120	150	190	220	230
धन की पूर्ति (करोड़ रु में) (Y)	1800	2000	2500	2700	3000

पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए, सरलीकरणों को निम्नलिखित विधि द्वारा दिखाया गया हैः

A = 100; h = 10; B = 1700 एवं k = 100

चरों की रूपांतरित सारणी नीचे दी गई हैः

कीमत सूचकांक तथा मुद्रा की पूर्ति के बीच पद-विचलन विधि का उपयोग करते हुए r का परिकलनः

सारणी 7.3

U $\left(\frac{X-100}{10}\right)$	V $\left(\frac{Y-1700}{100}\right)$	U^2	V^2	UV
2	1	4	1	2
5	3	25	9	15
9	8	81	64	72
12	10	144	100	120
13	13	169	169	169

$\Sigma U = 41$; $\Sigma V = 35$; $\Sigma U^2 = 423$;
$\Sigma V^2 = 343$; $\Sigma UV = 378$

इन मानों को सूत्र (3) में प्रतिस्थापन करने पर

$$r = \frac{\Sigma UV - \frac{(\Sigma U)(\Sigma V)}{N}}{\sqrt{\Sigma U^2 - \frac{(\Sigma U)^2}{N}}\sqrt{\Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{N}}} \quad (3)$$

$$= \frac{378 - \frac{41 \times 35}{5}}{\sqrt{423 - \frac{(41)^2}{5}}\sqrt{343 - \frac{(35)^2}{5}}}$$

= 0.98

कीमत सूचकांक एवं मुद्रा-पूर्ति के बीच यह प्रबल धनात्मक सहसंबंध वित्तीय नीतियों के लिए महत्त्वपूर्ण आधार है। जब मुद्रा-पूर्ति बढ़ती है तब कीमत सूचकांक में भी वृद्धि होती है।

क्रियात्मक गतिविधि

- भारत की जनसंख्या एवं राष्ट्रीय आय से संबंधित आँकड़ों का उपयोग करें और पद विचलन विधि का उपयोग करते हुए उनके बीच सहसंबंध का परिकलन करें।

स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध (Spearman's Rank Correlation)

'स्पीयरमैन कोटि सहसंबंध' का विकास ब्रिटिश मनोवैज्ञानिक सी.ई. स्पीयरमैन द्वारा किया गया था। इसका उपयोग निम्न परिस्थितियों में किया जाता है-

1. कल्पना कीजिए कि हमें किसी दूर-दराज़ के गाँव में जहाँ न कोई मापदंड उपलब्ध है और न कोई व.जन मापने की कोई मशीन, छात्रों की लंबाई और व.जन के बीच, सहसंबंध का आकलन करना है। ऐसी स्थिति में हम लंबाई अथवा वज़न का माप नहीं कर सकते, परंतु हम छात्रों को उनकी लंबाई और व.जन के अनुसार निश्चित रूप से कोटिबद्ध कर सकते हैं और फिर इन कोटियों को स्पीयरमैन के सहसंबंध की गणना में उपयोग किया जा सकता है।
2. कल्पना कीजिए कि हमें, निष्पक्षता, ईमानदारी अथवा सौंदर्य का अध्ययन करना है। हम इनका उसी प्रकार माप नहीं कर सकते, जिस प्रकार आय, भार अथवा लंबाई का। अधिक से अधिक, इन चीज़ों का सापेक्ष माप किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, हम लोगों को सौंदर्य के आधार पर कोटिबद्ध कर सकते हैं। कुछ लोग यह बहस कर सकते हैं कि ऐसा करना संभव नहीं है, क्योंकि सौंदर्य मापने के मापदंड और कसौटियाँ, व्यक्ति से व्यक्ति तथा संस्कृति से संस्कृति भिन्न हो सकती है। यदि हमें दो चरों के बीच, जिनमें कम से कम एक उपरोक्त प्रकार का है, तो स्पीयरमैन के सहसंबंध गुणांक का उपयोग किया जाएगा।
3. स्पीयरमैन के कोटि सहसंबंध का उन स्थितियों में भी उपयोग किया जा सकता है, जिनमें संबंध की दिशा तो स्पष्ट है, लेकिन वह गैर-रेखीय है, जैसा कि चित्र 7.6 तथा 7.7 के प्रकीर्ण चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

4. स्पीयरमैन का सहसंबंध गुणांक चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता। इस दृष्टि से यह कार्ल पीयरसन के सहसंबंध गुणांक से उत्तम है। अतः समंकों में यदि कुछ चरम मूल्य हैं, तो स्पीयरमैन के सहसंबंध गुणांक का उपयोग अति लाभप्रद होता है।

कोटि सहसंबंध गुणांक तथा सरल सहसंबंध गुणांक की व्याख्या समान रूप से की जाती है। इसका सूत्र सरल सहसंबंध गुणांक से प्राप्त किया गया है जहाँ व्यष्टिगत मानों को कोटियों द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है। इन कोटियों का प्रयोग सहसंबंध के परिकलन के लिए किया जाता है। यह गुणांक इन इकाइयों के लिए निर्धारित कोटियों के बीच रेखीय संबंध को मापता है, न कि उनके मानों के बीच। स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त करते हैंः

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n} \qquad ...(4)$$

यहाँ 'n' प्रेक्षणों की संख्या है तथा D किसी चर के लिए निर्धारित कोटियों का, किसी अन्य चर के लिए निर्धारित कोटि से, विचलन दर्शाता है।

सरल सहसंबंध गुणांक के सभी गुण यहाँ लागू किए जा सकते हैं। पियरसन सहसंबंध गुणांक की भाँति यह भी +1 तथा -1 के बीच स्थित होता है। हालाँकि, सामान्य तौर पर यह सामान्य विधि की तरह यथातथ नहीं होता है। इसका कारण यह है कि आँकड़ों से संबद्ध सभी सूचनाओं का उपयोग नहीं होता है।

प्रथम अंतर क्रमिक मानों में अंतर होता है। श्रृंखला में मदों के मानों के वे प्रथम अंतर जो उनके परिमाण के अनुसार क्रम में व्यवस्थित किए जाते हैं, आमतौर पर कभी स्थिर नहीं होते। सामान्यतः आँकड़ा-गुच्छ केंद्रीय मानों के आस पास सरणी के मध्य में थोड़े बहुत अंतर पर एकत्र होता है।

यदि प्रथम अंतर स्थिर होते, तब r और r_k समान परिमाण देते। सामान्यतः r_k का मान r से कम या इसके बराबर होता है।

कोटि सहसंबंध का परिकलन

1. जब कोटियाँ दी गई हों।
2. जब कोटियाँ नहीं दी गई हों। उन्हें आँकड़ों से प्राप्त किया जाना हो।
3. जब कोटियों की पुनरावृत्ति की गई हो।

स्थिति 1ः जब कोटियाँ दी गई हों

उदाहरण 3

किसी सौंदर्य प्रतियोगिता में तीन निर्णायकों द्वारा पाँच लोगों का मूल्यांकन किया जाता है। हमें ज्ञात करना है कि सौंदर्य-बोध के प्रति किन दो निर्णायकों का दृष्टिकोण सर्वाधिक समान है।

	प्रतियोगी				
निर्णायक	1	2	3	4	5
क	1	2	3	4	5
ख	2	4	1	5	3
ग	1	3	5	2	4

यहाँ पर निर्णायकों के तीन जोड़े हैं, अतः कोटि सहसंबंध का परिकलन तीन बार किया जायगा। यहाँ सूत्र (4) का प्रयोग करना चाहिए,

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n} \qquad ...(4)$$

निर्णायकों क और ख के बीच कोटि-सहसंबंध नीचे परिकलित किया गया हैः

क	ख	ग	ग^2
1	2	-1	1
2	4	-2	4
3	1	2	4
4	5	-1	1
5	3	2	4
योग			14

सूत्र (4) में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n} \qquad ...(4)$$

$$= 1 - \frac{6 \times 14}{5^3 - 5} = 1 - \frac{84}{120} = 1 - 0.7 = 0.3$$

निर्णायकों (क) और (ग) के बीच कोटि सहसंबंध निम्नवत् परिकलित किया गया हैः

क	ख	ग	ग^2
1	1	0	0
2	3	-1	1
3	5	-2	4
4	2	2	4
5	4	1	1
योग			10

सूत्र (4) में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर कोटि सहसंबंध 0.5 होता है। ठीक इसी प्रकार से निर्णायकों 'ख' और 'ग' के बीच कोटि सहसंबंध 0.9 है। अतः निर्णायकों 'क' और 'ग' के सौंदर्य बोध निकटतम हैं। निर्णायक 'ख' और 'ग' की रुचियाँ काफी भिन्न है।

स्थिति 2: जब कोटियाँ नहीं दी गई हों

उदाहरण 4

यहाँ पर 5 छात्रों द्वारा अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी विषयों में प्राप्त अंकों का प्रतिशत दिया गया है। अब कोटियों का निर्धारण करना है और कोटि सह-संबंध का परिकलन करना है।

छात्र	सांख्यिकी में प्राप्तांक (X)	अर्थशास्त्र में प्राप्तांक (Y)
क	85	60
ख	60	48
ग	55	49
घ	65	50
ड़	75	55

छात्र	सांख्यिकी में कोटियाँ (R_x)	अर्थशास्त्र में कोटियाँ (R_y)
क	1	1
ख	4	5
ग	5	4
घ	3	3
ङ	2	2

एक बार जब कोटियाँ देने का क्रम जब पूरा हो जाए तो कोटि सहसंबंध के परिकलन के लिए सूत्र (4) का प्रयोग किया जाता है।

स्थिति 3: जब कोटियों को दोहराया गया हो

उदाहरण 5

X तथा Y के मान नीचे दिए गये हैं:

(X)	(Y)
1200	75
1150	65
1000	50
990	100
800	90
780	85
760	90
750	40
730	50
700	60
620	50
600	75

कोटि सहसंबंध के परिकलन के लिए मानों की कोटियाँ निर्धारित की जाती हैं। दोहराए गए मदों के लिए समान कोटियाँ दी जाती हैं। समान कोटि उन कोटियों का माध्य है जिन्हें वे मद तब धारण करते हैं, जब उनमें एक दूसरे से भिन्नता होती। अगले मद के लिए वह कोटि निर्धारित की जायेगी जो पहले दी गई कोटि के बाद होगी।

यहाँ नौवीं, दसवीं तथा ग्यारहवीं कोटियों का मान 50 है। अतः इन तीनों को औसत कोटि अर्थात 10 दी गई है।

कोटि X	कोटि Y	कोटि क्रम में विचलन D^2	
1	5.5	-4.5	20.25
2	7	-5	25.00
3	10	-7	49.00
4	1	3	9.00
5	2.5	2.5	6.25
6	4	2	4.00
7	2.5	4.5	20.25
8	12	-4	16.00
9	10	-1	1.00
10	8	2	4.00
11	10	1	1.00
12	5.5	6.5	42.25
योग			198.00

जब कोटियों को दोहराया जाता है तो स्पीयरमैन कोटि सहसंबंध के गुणांक का सूत्र इस प्रकार है-

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{(m^3{}_1 - m_1)}{12} + \frac{(m^3{}_2 - m_2)}{12} + \dots\right]}{n(n^2 - 1)}$$

यहाँ m_1, m_2, ..., कोटियों की पुनरावृत्त संख्याएँ हैं और $\frac{m^3{}_1 - m_1}{12}$ ..., उनके संगत संशोधन गुणक हैं। इस विवरण के लिए आवश्यक सुधार इस प्रकार हैः

$$\frac{3^3-3}{12} + \frac{2^3-2}{12} = \frac{30}{12} = 2.5$$

इन व्यंजकों के मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$rs = 1 - \frac{6\,(198+2.5)}{12^3 - 12} = (1-0.70) = 0.30$$

इस प्रकार यहाँ पर X और Y के बीच धनात्मक कोटि सहसंबंध है। X तथा Y दोनों एक ही दिशा में गतिमान हैं। हालाँकि इनके संबंध को सुदृढ़ नहीं कहा जा सकता।

क्रियात्मक गतिविधि

- अपनी कक्षा के 10 छात्रों द्वारा नवीं और दसवीं की परीक्षाओं में प्राप्त किए अंकों के आँकड़े संगृहीत करें। उनके बीच कोटि सहसंबंध गुणांक का परिकलन करें। यदि आपके आँकड़ों में पुनरावर्तन हो, तो दोहराई गई कोटियों वाले आँकड़ों का संग्रह करके इस अभ्यास को पुनः दोहराएँ।
  ऐसी कौन सी स्थितियाँ हैं, जिनमें कोटि सहसंबंध गुणांक को सरल सह संबंध गुणांक की तुलना में प्राथमिकता दी जाती है। यदि आँकड़ों को सही ढंग से मापा जाय, तो क्या फिर भी आप कोटि सहसंबंध गुणांक की तुलना में सरल गुणांक को प्राथमिकता देंगे? आप किन स्थितियों में इनके चुनाव में तटस्थ रह सकते हैं? कक्षा में इन मुद्दों पर चर्चा कीजिए।

4. **सारांश**

हमने दो चरों के बीच संबंध, विशेषतः रेखीय संबंध, के अध्ययन के लिए कुछ प्रविधियों की चर्चा की। प्रकीर्ण आरेख संबंधों की दृश्यात्मक प्रस्तुति करता है और यह रेखीय संबंध तक ही सीमित नहीं है। कार्ल पियरसन का सहसंबंध गुणांक तथा स्पीयरमैन का कोटि-सहसंबंध चरों के बीच रेखीय संबंधों की माप हैं। जब चरों को परिशुद्ध रूप से मापना संभव न हो, तो वहाँ कोटि सहसंबंध का प्रयोग हो सकता है। लेकिन ये माप कार्य-कारण संबंध सूचित नहीं करते। जब सहसंबंधित चरों में परिवर्तन होता है, तो सहसंबंध का ज्ञान हमें चरों में परिवर्तन की दिशा तथा गहनता के बारे में बताता है।

पुनरावर्तन

- सहसंबंध विश्लेषण के अंतर्गत दो चरों के बीच के संबंधों का अध्ययन किया जाता है।
- प्रकीर्ण आरेख दो चरों के बीच संबंध के स्वरूप का दृश्य प्रस्तुतीकरण करता है।
- कार्ल पियरसन का सहसंबंध गुणांक r दो चरों के बीच केवल रेखीय संबंध को संख्यात्मक रूप से मापता है। r सदैव -1 तथा +1 के बीच स्थित रहता है।
- यदि चरों को परिशुद्धता से न मापा जा सके, तो स्पीयरमेन के कोटि सहसंबंध का उपयोग रेखीय संबंधों को संख्यात्मक रूप से मापने के लिए किया जा सकता है।
- दोहराई गई कोटियों को संशोधन गुणकों की आवश्यकता होती है।
- सहसंबंध का तात्पर्य कार्य-कारण संबंध नहीं, बल्कि केवल सहप्रसरण दर्शाना है।

अभ्यास

1. कद (फुटों में) तथा वज़न (किलोग्राम में) के बीच सहसंबंध गुणांक की इकाई हैः
   (क) कि.ग्रा./फुट
   (ख) प्रतिशत
   (ग) अविद्यमान
2. सरल सहसंबंध गुणांक का परास निम्नलिखित होगा
   (क) 0 से अनंत तक
   (ख) -1 से +1 तक
   (ग) ऋणात्मक अनंत (infinity) से धनात्मक अनंत (infinity) तक
3. यदि r_{xy} धनात्मक है तो x और y के बीच का संबंध इस प्रकार का होता हैः
   (क) जब y बढ़ता है तो x बढ़ता है।
   (ख) जब y घटता है तो x बढ़ता है।
   (ग) जब y बढ़ता है तो x नहीं बदलता है।
4. यदि $r_{xy} = 0$ तब चर x और y के बीचः
   (क) रेखीय संबंध होगा
   (ख) रेखीय संबंध नहीं होगा
   (ग) स्वतंत्र होगा
5. निम्नलिखित तीनों मापों में, कौन सा माप किसी भी प्रकार के संबंध की माप कर सकता है।
   (क) कार्ल पियरसन सहसंबंध गुणांक
   (ख) स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध
   (ग) प्रकीर्ण आरेख
6. यदि परिशुद्ध रूप से मापित आँकड़े उपलब्ध हों, तो सरल सहसंबंध गुणांकः
   (क) कोटि सहसंबंध गुणांक से अधिक सही होता है।
   (ख) कोटि सहसंबंध गुणांक से कम सही होता है।
   (ग) कोटि सहसंबंध की ही भाँति सही होता है।

7. साहचर्य के माप के लिए r को सहप्रसरण से अधिक प्राथमिकता क्यों दी जाती है?
8. क्या आँकड़ों के प्रकार के आधार पर r, -1 तथा +1 के बाहर स्थित हो सकता है?
9. क्या सहसंबंध के द्वारा कार्यकारण संबंध की जानकारी मिलती है?
10. सरल सहसंबंध गुणांक की तुलना में कोटि सहसंबंध गुणांक कब अधिक परिशुद्ध होता है?
11. क्या शून्य सहसंबंध का अर्थ स्वतंत्रता है?
12. क्या सरल सहसंबंध गुणांक किसी भी प्रकार के संबंध को माप सकता है?
13. एक सप्ताह तक अपने स्थानीय बाजार से 5 प्रकार की सब्जियों की कीमतें प्रतिदिन एकत्र करें। उनका सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए। इसके परिणाम की व्याख्या कीजिए।
14. अपनी कक्षा के सहपाठियों के कद मापिए। उनसे उनके बेंच पर बैठे सहपाठी का कद पूछिए। इन दो चरों का सहसंबंध गुणांक परिकलित कीजिए और परिणाम का निर्वचन कीजिए।
15. कुछ ऐसे चरों की सूची बनाएँ जिनका परिशुद्ध मापन कठिन हो।
16. r के विभिन्न मानों +1, -1, तथा 0 की व्याख्या करें।
17. पियरसन सहसंबंध गुणांक से कोटि सहसंबंध गुणांक क्यों भिन्न होता है?
18. पिताओं (x) और उनके पुत्रों (y) के कदों का माप नीचे इंचों में दिया गया है, इन दोनों के बीच सहसंबंध गुणांक को परिकलित कीजिए

x	65	66	57	67	68	69	70	72
y	67	56	65	68	72	72	69	71

(उत्तर $r = 0.603$)

19. x और y के बीच सहसंबंध गुणांक को परिकलित कीजिए और उनके संबंध पर टिप्पणी कीजिए।

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	9	4	1	1	4	9

(उत्तर $r = 0$)

20. x और y के बीच सहसंबंध गुणांक को परिकलित कीजिए और उनके संबंध पर टिप्पणी कीजिए।

x	1	3	4	5	7	8
y	2	6	8	10	14	16

(उत्तर $r = 1$)

क्रियात्मक गतिविधि

- भारत की राष्ट्रीय आय और निर्यात के कम से कम 10 प्रेक्षण लेकर, इस पाठ में बताए गए सभी सूत्रों का उपयोग करते हुए r को परिकलित कीजिए।

11099CH08

अध्याय 8

सूचकांक

इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे किः
- सूचकांक शब्द का अर्थ समझ सकें;
- अधिकतर प्रयोग किए जाने वाले कुछ सूचकांकों से परिचित हो सकें;
- सूचकांक का परिकलन कर सकें;
- इसकी सीमाओं को समझ सकें।

1. प्रस्तावना

पिछले अध्यायों में आपने पढ़ा कि आँकड़ों के समूह से संक्षिप्त मापों को कैसे प्राप्त किया जा सकता है। अब आप पढ़ेंगे कि संबंधित चरों के समूह में परिवर्तन के द्वारा संक्षिप्त मापों को कैसे प्राप्त करें।

रवि काफी समय के बाद बाज़ार जाता है। वह देखता है कि अधिकांश वस्तुओं की कीमतें परिवर्तित हो चुकी हैं। कुछ वस्तुएँ महँगी हो गई हैं तो कुछ वस्तुएँ सस्ती। वह बाज़ार से खरीद कर लाई गई प्रत्येक वस्तु की परिवर्तित कीमतों के बारे में अपने पिताजी को बताता है। यह दोनों के लिए ही विस्मयकारी था।

औद्योगिक क्षेत्र के अंतर्गत कई उपक्षेत्रक भी आते हैं। इनमें से प्रत्येक में परिवर्तन हो रहा है। कुछ उपक्षेत्रकों में उत्पादन बढ़ रहा है, जबकि कुछ में घट रहा है। ये परिवर्तन एकरूप नहीं हैं। व्यष्टि दरों में परिवर्तन के वर्णन को समझना कठिन होगा। क्या कोई एकल संख्या इन परिवर्तनों को प्रस्तुत कर सकती है? निम्नलिखित उदाहरणों को देखें:

उदाहरण 1

एक औद्योगिक श्रमिक 1982 में 1000 रु वेतन प्राप्त करता था। आज उसकी आय 12000 रु है। क्या ऐसा कहा जा सकता है कि इस अवधि में उसके जीवन-स्तर में 12 गुना सुधार आया है? उसके वेतन को कितना बढ़ाया जाना चाहिए, ताकि उसका जीवन स्तर वैसा हो जाय, जैसा पहले था?

उदाहरण 2

आप समाचार-पत्रों में सेंसेक्स के बारे में अवश्य ही पढ़ते होंगे। सेंसेक्स का 8000 का अंक पार करना, वास्तव में सुखद अहसास कराता है। हाल ही में, जब सेंसेक्स 600 अंक नीचे गिरा तो निवेशकों की संपत्ति में 1, 53, 690 करोड़ रु का भारी नुकसान हुआ। यथार्थ में सेंसेक्स है क्या?

उदाहरण 3

सरकार कहती है कि पेट्रोलियम पदार्थों की कीमतों में वृद्धि के कारण मुद्रास्फीति दर में तेजी से वृद्धि होगी। मुद्रास्फीति की माप कैसे की जाती है?

ये ऐसे प्रश्नों के कुछ उदाहरण हैं जिनसे आपका सामना प्रतिदिन होता रहता है। सूचकांक के अध्ययन से इन प्रश्नों का विश्लेषण करने में सहायता मिलती है।

2. सूचकांक क्या है?

सूचकांक संबंधित चरों के समूह के परिमाण में परिवर्तनों को मापने का एक सांख्यिकीय साधन है। यह अपसारित (भिन्न-भिन्न दिशाओं में) होने वाले अनुपातों की सामान्य प्रवृत्ति का प्रतिनिधित्व करता है, जिनसे इसको परिकलित किया जाता है। यह दो भिन्न स्थितियों में संबंधित चरों के किसी समूह में औसत परिवर्तन का एक माप है। तुलना समान वर्गों में की जा सकती है जैसे व्यक्तियों, स्कूलों, अस्पतालों आदि में। सूचकांक उल्लिखित वस्तुओं की सूची में कीमतों, उद्योग के विभिन्न क्षेत्रकों में उत्पादन की मात्रा, विभिन्न कृषि फसलों का उत्पादन, निर्वाह खर्च आदि चरों के मूल्यों में परिवर्तन को भी मापता है।

परंपरागत रूप से, सूचकांकों को प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। दो अवधियों में से, जिस अवधि के साथ तुलना की जाती है, उसे आधार-अवधि के रूप में जाना जाता है। आधार-अवधि में

सूचकांक का मान 100 होता है। यदि आप जानना चाहते हैं कि 1990 के स्तर से 2005 में कीमतों में कितना परिवर्तन हुआ है, तब 1990 आधार बन जाता है। किसी भी अवधि का सूचकांक इसके अनुपात में होता है। अतः 250 का सूचकांक यह इंगित करता है कि मूल्य, आधार अवधि के मान का ढाई गुना है।

कीमत-सूचकांक कुछ वस्तुओं की कीमतों की माप करता है जिससे उनकी तुलना संभव हो पाती है। परिमाणात्मक सूचकांक उत्पादन की भौतिक मात्रा, निर्माण तथा रोज़गार में परिवर्तन को मापता है। यद्यपि कीमत-सूचकांकों का प्रयोग अधिकांश रूप से किया जाता है, उत्पादन सूचकांक भी अर्थव्यवस्था में उत्पादन के स्तर का महत्वपूर्ण सूचक होता है।

3. सूचकांक की रचना

निम्नलिखित खंडों में सूचकांक की रचना के सिद्धांतों को कीमत-सूचकांक के माध्यम से उदाहरण सहित समझाया जाएगा।
निम्नलिखित उदाहरण देखेंः

उदाहरण 1

सरल समूहित कीमत सूचकांक का परिकलन

सारणी 8.1

वस्तु	आधार अवधि कीमत (रु)	वर्तमान अवधि कीमत (रु)	प्रतिशत परिवर्तन
A	2	4	100
B	5	6	20
C	4	5	25
D	2	3	50

जैसा कि आप इस उदाहरण में देखते हैं, प्रत्येक वस्तु के लिए प्रतिशत परिवर्तन भिन्न-भिन्न है। यदि सभी चारों वस्तुओं के लिए प्रतिशत परिवर्तन एक समान रहता, तो परिवर्तनों की व्याख्या करने के लिए केवल एक माप ही पर्याप्त होता। तथापि प्रतिशत परिवर्तनों में भिन्नता होती है तथा प्रत्येक मद के लिए प्रतिशत परिवर्तन को रिपोर्ट करना भ्रामक होगा। ऐसा तब होता है जब वस्तुओं की संख्या बहुत अधिक होती है, जो किसी भी वास्तविक बाज़ार स्थिति में सामान्य है। कीमत-सूचकांक इन परिवर्तनों को एकल संख्यात्मक माप के द्वारा प्रस्तुत करता है।

सूचकांक की रचना करने की दो विधियाँ हैं। इन्हें समूहित विधि के द्वारा तथा सापेक्षों के माध्य परिकलन विधि के द्वारा अभिकलित किया जा सकता है।

समूहित विधि (Aggregative Method)

एक सरल समूहित कीमत-सूचकांक के लिए सूत्र है,

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100$$

यहाँ पर p_1 तथा p_0 क्रमशः वर्तमान अवधि तथा आधार अवधि में वस्तुओं की कीमत को इंगित करता है। उदाहरण 1 के आँकड़ों का प्रयोग करते हुए सरल समूहित कीमत सूचकांक है,

$$P_{01} = \frac{4+6+5+3}{2+5+4+2} \times 100 = 138.5$$

यहाँ यह कहा जाता है कि कीमतों में 38.5 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।

क्या आप जानते हैं कि इस प्रकार के सूचकांकों का उपयोग सीमित होता है। इसका कारण यह है कि विभिन्न वस्तुओं की कीमतों के माप की इकाइयाँ समान नहीं होती हैं। यह अभारित (सूचकांक) है, क्योंकि इसमें मदों का सापेक्षिक महत्व उपयुक्त रूप से प्रतिबिंबित नहीं होता है। यहाँ सभी मदों को बराबर महत्व या भार वाला माना जाता है। लेकिन वास्तव में क्या होता है? वास्तव में, क्रय की गई मदों के महत्व के क्रम में भिन्नता होती है। हमारे व्यय में खाद्य पदार्थों का अनुपात काफी अधिक होता है। ऐसी स्थिति में अधिक भार वाली मद की कीमत में तथा कम भारवाली मद की कीमत में समान वृद्धि के द्वारा कीमत सूचकांक में होने वाले कुल परिवर्तन के आशय भिन्न-भिन्न होंगे।

भारित कीमत सूचकांक के लिए सूत्र है,

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

कोई सूचकांक तब भारित सूचकांक बन जाता है, जब मदों के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखा जाता है। यहाँ भार परिमाणात्मक भार है। भारित समूहित सूचकांक की रचना में कुछ विशेष वस्तुओं को लिया जाता है तथा इनके मूल्य को प्रतिवर्ष परिकलित किया जाता है। इस प्रकार, यह वस्तुओं के एक निश्चित समूह के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन को मापता है। क्योंकि वस्तुओं के निश्चित समूह के कुल मूल्य में परिवर्तन होता है, यह परिवर्तन कीमत में परिवर्तन के कारण होता है। भारित समूहित सूचकांक परिकलन की विभिन्न विधियों में भिन्न-भिन्न समय में वस्तुओं के भिन्न-भिन्न समूहों का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 2

भारित समूहित कीमत सूचकांक का परिकलन

सारणी 8.2

वस्तुएँ	आधार अवधि		वर्तमान अवधि	
	कीमत	मात्रा	कीमत	मात्रा
	P_0	q_0	p_1	q_1
A	2	10	4	5
B	5	12	6	10
C	4	20	5	15
D	2	15	3	10

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{4 \times 10 + 6 \times 12 + 5 \times 20 + 3 \times 15}{2 \times 10 + 5 \times 12 + 4 \times 20 + 2 \times 15} \times 100$$

$$= \frac{257}{190} \times 100 = 135.3$$

यह विधि आधार अवधि की मात्राओं को भार के रूप में प्रयुक्त करती है। भारित समूहित कीमत सूचकांक, जब आधार अवधि की मात्रा को भार के रूप में प्रयोग करता है उसे लेस्पेयर कीमत सूचकांक भी कहते हैं। यह इस प्रश्न की व्याख्या करता है कि यदि आधार अवधि में वस्तुओं की एक टोकरी पर व्यय रु 100 था, तो वस्तुओं की उसी टोकरी पर वर्तमान अवधि में कितना व्यय होना चाहिए? जैसा कि आप यहाँ देख सकते हैं कि कीमत-वृद्धि के कारण, आधार-अवधि परिमाणों का मूल्य 35.3 प्रतिशत तक बढ़ गया है। आधार-अवधि मात्रा को भार के रूप में प्रयोग करके, यह कहा जा सकता है कि कीमतों में 35.3 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।

चूँकि वर्तमान अवधि परिमाण आधार-अवधि परिमाणों से भिन्न होते हैं, अतः वर्तमान अवधि भार का प्रयोग करने वाला सूचकांक, सूचकांकों का भिन्न मूल्य देता है।

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{4 \times 5 + 6 \times 10 + 5 \times 15 + 3 \times 10}{2 \times 5 + 5 \times 10 + 4 \times 15 + 2 \times 15} \times 100$$

$$= \frac{185}{140} \times 100 = 132.1$$

यह वर्तमान अवधि परिमाणों का भार के रूप में प्रयोग करता है। जब भारित समूहित कीमत सूचकांक वर्तमान अवधि परिमाण को भार के रूप में प्रयोग करता है, तो यह 'पाशे का मूल्य सूचकांक' के नाम से जाना जाता है। यह ऐसे प्रश्नों के उत्तर देने में सहायक होता है कि जब वर्तमान अवधि वस्तुओं की टोकरी को आधार-अवधि में उपभोग किया जाता और यदि हम इस पर 100 रु व्यय करते, तो वस्तुओं की उसी टोकरी पर वर्तमान अवधि में कितना व्यय होना चाहिए? पाशे के कीमत सूचकांक के अंतर्गत 132.1 को 32.1 प्रतिशत कीमत में वृद्धि के रूप में व्यक्त किया जाता है। वर्तमान अवधि भार का प्रयोग करते हुए यह कहा जाएगा कि कीमत 32.1 प्रतिशत बढ़ गई है।

मूल्यानुपातों की माध्य विधि (Method of Averaging Relatives)

जब केवल एक वस्तु हो, तब कीमत-सूचकांक वस्तु की वर्तमान अवधि की कीमत तथा आधार-अवधि

की कीमत का अनुपात होता है। सामान्यतः इसे प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है। मूल्यानुपातों की माध्य परिकलन विधि इन मूल्यानुपातों के औसत या माध्य का प्रयोग तब करती है, जब वस्तुएँ अधिक होती हैं। मूल्यानुपातों का प्रयोग करने वाले सूचकांक को इस प्रकार से पारिभाषित किया जाता है

$$P_{01} = \frac{1}{n}\Sigma\frac{p_1}{p_0}\times 100$$

यहाँ P_1 तथा P_0 क्रमशः वर्तमान अवधि और आधार अवधि में वस्तु की कीमतों को इंगित करते हैं। अनुपात $(P_1 / P_0)\times 100$ को वस्तु का मूल्यानुपात भी कहा जाता है। यहाँ n = वस्तुओं की संख्या है। वर्तमान उदाहरण में,

$$P_{01} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{2}+\frac{6}{5}+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)\times 100 = 149$$

इस तरह से वस्तुओं की कीमत में 49 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।

मूल्यानुपातों का भारित सूचकांक भारित समान्तर माध्य होता है, जिसे इस प्रकार से परिभाषित किया जाता हैः

$$P_{01} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} W_i\left(\frac{P_{1i}}{P_{0i}}\times 100\right)}{\Sigma_{i=1}^{n} W_i}$$

यहाँ W भार है।

भारित मूल्यानुपात सूचकांक में भारों का निर्धारण आधार वर्ष में कुल व्यय में उन पर किए गए व्यय के अनुपात अथवा प्रतिशत द्वारा किया जा सकता है। यह वर्तमान अवधि के लिए भी हो सकता है, जो प्रयोग किए गए सूत्र पर निर्भर करता है। अनिवार्यतः ये कुल व्यय में विभिन्न वस्तुओं पर किए गए व्यय के मूल्यांश होते हैं। सामान्यतः आधार-अवधि भार को वर्तमान अवधि भार की अपेक्षा अधिक वरीयता दी जाती है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि प्रतिवर्ष भार का परिकलन असुविधाजनक होता है। यह (वस्तुओं की) विभिन्न टोकरियों के परिवर्तित मूल्यों को भी दर्शाता है। ये तुलना योग्य नहीं होते। उदाहरण 3 भारित कीमत सूचकांक के परिकलन के लिए आवश्यक सूचना की जानकारी देता है।

उदाहरण 3

भारित मूल्यानुपातों के कीमत सूचकांक का परिकलन

सारणी 8.3

वस्तु	भार (% में)	आधार वर्ष कीमत (रु में)	वर्तमान वर्ष कीमत (रु में)	मूल्यानुपात
A	40	2	4	200
B	30	5	6	120
C	20	4	5	125
D	10	2	3	150

भारित कीमत सूचकांक है,

$$P_{01} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} W_i\left(\frac{P_{1i}}{P_{0i}}\times 100\right)}{\Sigma_{i=1}^{n} W_i}$$

$$= \frac{40\times 200 + 30\times 120 + 20\times 125 + 10\times 150}{100}$$

= 156

यहाँ भारित कीमत सूचकांक 156 है। कीमत सूचकांक 56 प्रतिशत बढ़ गया है। अभारित कीमत सूचकांक तथा भारित कीमत सूचकांक के मानों में अंतर होता है, जोकि होना भी चाहिए। भारित सूचकांक में अधिक वृद्धि उदाहरण 3 में अति महत्वपूर्ण मद के दोगुना होने के कारण है।

क्रियात्मक गतिविधि

- उदाहरण 2 में दिए गए आँकड़ों में वर्तमान अवधि के मूल्यों को आधार-अवधि के मूल्यों में परिवर्तित कीजिए। लेस्पेयर तथा पाशे के सूत्रों का प्रयोग करते हुए कीमत सूचकांक परिकलित कीजिए। पूर्ववर्ती उदाहरण की तुलना में आप क्या अंतर पाते हैं?

4. कुछ महत्वपूर्ण सूचकांक

उपभोक्ता कीमत सूचकांक (Consumer Price Index)

उपभोक्ता कीमत सूचकांक (CPI) को निर्वाह सूचकांक के नाम से भी जानते हैं। यह खुदरा कीमतों में औसत परिवर्तन को मापता है। निम्नलिखित वक्तव्य पर ध्यान दीजिए कि दिसम्बर 2014 में उपभोक्ता कीमत सूचकांक (CPI) 277 (2001 = 100) है। इस कथन का अभिप्राय क्या है? इसका अभिप्राय है कि यदि एक औद्योगिक श्रमिक वस्तुओं की विशेष टोकरी पर 2001 में 100 रु व्यय कर रहा था, तो उसे दिसम्बर 2014-15 में उसी प्रकार की वस्तुओं की टोकरी खरीदने के लिए 277 रु की आवश्यकता है। यह आवश्यक नहीं है कि वह टोकरी खरीदे, बल्कि महत्वपूर्ण यह है कि उसके पास इसे खरीद पाने की क्षमता है या नहीं।

उदाहरण 4

उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना

$$CPI = \frac{\sum WR}{\sum W} = \frac{9786.85}{100} = 97.86$$

यह उदाहरण प्रदर्शित करता है कि जीवन निर्वाह की कीमत में 2.14 प्रतिशत की गिरावट आई है। 100 से अधिक का सूचकांक क्या संकेत देता है? इसका अर्थ है कि निर्वाह लागत में वृद्धि, मजदूरी एवं वेतन में उपरिमुखी समायोजन की आवश्यकता है। यह वृद्धि उतने प्रतिशत की होनी चाहिए जितना यह (सूचकांक) 100 से अधिक होता है। यदि सूचकांक 150 है, तो 50 प्रतिशत उपरिमुखी समायोजन की आवश्यकता है। इसका अर्थ है कि कर्मचारियों के वेतन में 50% वृद्धि की जानी चाहिए।

उपभोक्ता कीमत सूचकांक

भारत में राजकीय संस्थाओं/ एजेंसी.ज द्वारा बड़ी संख्या में उपभोक्ता कीमत सूचकांकों की रचना की जाती है। उनमें से कुछ निम्न प्रकार हैंः

- औद्योगिक श्रमिकों के लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक (आधार वर्ष 2001=100) मई 2017 में इस सूचकांक का मूल्य 278 था।

सारणी 8.4

मद	भार % में W	आधार अवधि कीमत (रु)	वर्तमान अवधि कीमत (रु)	$R=P_1/P_o \times 100$ (% में)	WR
खाद्य (आहार)	35	150	145	96.67	3883.45
ईंधन	10	25	23	92.00	920.00
कपड़े	20	75	65	86.67	1733.40
किराया	15	30	30	100.00	1500.00
सम्मिश्रित	20	40	45	112.50	2250.00
					9786.85

- कृषि श्रमिकों के लिए अखिल भारतीय उपभोक्ता कीमत सूचकांक (आधार वर्ष 1986-87=100) मई 2017 में इसका मूल्य 872 था।
- ग्रामीण श्रमिकों के लिए अखिल भारतीय उपभोक्ता कीमत सूचकांक (आधार वर्ष 1986-87=100) मई 2017 में इसका मूल्य 878 था।
- अखिल भारतीय ग्रामीण उपभोक्ता सूचकांक (आधार वर्ष 2012=100) मई 2017 में इसका मूल्य 133.3 था।
- अखिल भारतीय शहरी उपभोक्ता कीमत सूचकांक (आधार वर्ष 2012=100) मई 2017 में इसका मूल्य 129.3 था।
- अखिल भारतीय संयुक्त उपभोक्ता कीमत सूचकांक (आधार वर्ष 2012=100) मई 2017 में इस सूचकांक का मूल्य 131.4 था।

इसके अतिरिक्त, यह सूचकांक राज्य स्तर पर भी उपलब्ध है।

उपरोक्त प्रत्येक सूचनाओं की रचना में प्रयुक्त विस्तृत रीतियाँ अलग-अलग हैं। उन ब्योरों में इस स्तर पर जाना आवश्यक नहीं है।

भारतीय रि.जर्व बैंक, अखिल भारतीय संयुक्त उपभोक्ता कीमत सूचकांक को, कीमतों में परिवर्तन के मुख्य मापक के रूप में प्रयोग करती है। इसलिए इस सूचकांक के विषय में कुछ विस्तृत जानकारी आवश्यक है।

अब इस सूचकांक को 2012=100 के आधार पर बनाया जा रहा है और अंतर्राष्ट्रीय मानकों के अनुसार इसमें अनेक सुधार किए गए हैं। संशोधित शृंखला के लिए, मदों की बास्केट, भारांकन तथा चित्रों को राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (National Sample Survey) के 68वें (Modified Mixed Reference Period- MMRP) समंकों का प्रयोग कर तैयार किया गया है। भार निम्नवत हैः

मुख्य समूह भार	(प्रतिशत में)
खाद्य एवं पेय	45.86
पान, तंबाकू तथा मादक पदार्थ	2.38
कपड़े तथा जूते	6.53
आवास	10.07
ईंधन एवं प्रकाश	6.84
विविध	28.32
सामान्य	100.00

स्रोतः आर्थिक सर्वेक्षण, 2014-15, भारत सरकार।

समंकों को प्रतयेक उप-समूह तथा प्रमुख समूहों में होने वाले प्रतिवर्ष, परिवर्तन की दर से ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार, इन समंकों से हम ज्ञात कर सकते हैं कि सबसे ज़्यादा कौन-सी कीमतें बढ़ रही हैं और मुद्रास्फीति में अपना योगदान दे रही हैं।

'उपभोक्ता खाद्य मूल्य सूचकांक' (Consumer Food Price Index–CFPI) वही है जो 'Price Index for 'Food and Beverages' होता है सिवाय इसके कि इसमें मादक पेय और निर्मित भोजन, स्नैक्स, मिठाइयाँ सम्मिलित नहीं की जाती हैं।

थोक कीमत सूचकांक (Wholesale Price Index)

थोक कीमत सूचकांक सामान्य कीमत-स्तर में परिवर्तन का संकेत देता है। उपभोक्ता कीमत सूचकांक के विपरीत इसके लिए कोई संदर्भ उपभोक्ता श्रेणी नहीं होती है। इसके अंतर्गत ऐसे मद शामिल नहीं होते हैं, जो सेवा से संबंधित हों जैसे नाई के प्रभार, मरम्मत आदि।

इस कथन से क्या यह अभिप्राय है कि थोक मूल्य सूचकांक (आधार वर्ष 2004-05) अक्तूबर 2014 में 253 था? इसका यह यर्थ है कि इस अवधि में सामान्य कीमत स्तर में 153 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।

अब थोक मूल्य सूचकांक 2011-12=100 को आधार मानकर प्रकट किया जा रहा है। मई 2017 के लिए यह सूचकांक 112.8 था। यह सूचकांक, थोक स्तर पर प्रचलित मूल्यों का प्रयोग करता है। वस्तुओं की केवल कीमतों को सम्मिलित किया जाता है। प्रमुख वस्तु प्रकार और उनके भार निम्नवत हैं-

प्रमुख समूह	भार (प्रतिशत में)
प्राथमिक वस्तुएँ	22.62
ईंधन एवं शक्ति	13.15
विनिर्मित वस्तुएँ	64.23
समस्त वस्तुएँ 'हेडलाइन मुद्रास्फीति'	100.00
WPI खाद्य सूची	24.23

स्रोतः सांख्यिकी मंत्रालय एवं कार्यक्रम कार्यान्वयन, 2016-17।

सामान्यतः थोक मूल्य शीघ्रता से उपलब्ध हो जाते हैं। समग्र वस्तु मुद्रास्फीति दर (All Commodities Inflation Rate) को सामान्यतः हेडलाइन मुद्रास्फीति (Headline Inflation) कहा जाता है। कभी खाद्य वस्तुओं पर अधिक .जोर होता है जो कुल भार का 24.23 प्रतिशत है। इस खाद्य सूचकांक को प्राथमिक वस्तु समूह की खाद्य वस्तुओं तथा विनिर्मित उत्पाद समूह की खाद्य वस्तुओं से तैयार किया जाता है। कुछ अर्थशास्त्री विनिर्मित माल (खाद्य पदार्थ एवं ईंधन को छोड़कर) के थोक मूल्यों पर .जोर देना चाहते हैं तथा इसके लिए वे कोर मुद्रास्फीति (Core Inflation) का अद्यतन करते हैं जिसका थोक मूल्य सूचकांक के भारों में लाभ का 55 प्रतिशत भाग है।

औद्योगिक उत्पादन सूचकांक

उपभोक्ता कीमत सूचकांक अथवा थोक मूल्य सूचकांक से अलग, यह वह सूचकांक है जो मात्राओं को मापने का प्रयास करता है। अप्रैल 2017 से, इसका आधार वर्ष 2011-12=100 निश्चित किया गया है। आधार वर्ष में तीव्र परिवर्तनों का कारण यह है कि प्रतिवर्ष या तो अनेक वस्तुओं का उत्पादन बंद हो जाता है या महत्वहीन हो जाता है, जबकि अन्य अनेक वस्तुओं का विनिर्माण शुरू हो जाता है।

जबकि कीमत सूचकांक अनिवार्य रूप से, कीमत मूल्यानुपातों के भारित माध्य थे, औद्योगिक उत्पादन सूचकांक, मात्रा मूल्यानुपातों के भारित अंकगणितीय माध्य है जहाँ विभिन्न मदों के उनके द्वारा आधार वर्ष में जोड़े गए मूल्य के अनुपातों में भार दिए जाते हैं। जिनको लेसपेयरे के निम्न सूत्र द्वारा निर्धारित किया जाता है-

$$IIP_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} W_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \times 100$$

यहाँ IIP_{01} सूचकांक है, q_{1i} वर्ष 1 के लिए वस्तु i के लिए 0 आधार वर्ष पर मात्रा मूल्यानुपात है। Wi, वस्तु i का आबंटित भार है। उत्पादन सूचकांक में n वस्तुएँ हैं।

औद्योगिक उत्पादन सूचकांक, औद्योगिक क्षेत्रकों तथा उप-क्षेत्रकों के स्तर पर उपलब्ध होता है। इसकी प्रमुख शाखाएँ हैं- 'खनन', 'विनिर्माण' एवं 'विद्युत'। कभी-कभी हमारा .जोर 'कोर' उद्योगों पर होता है, जैसे कोयला, कच्चा तेल, प्राकृतिक गैस, रिफाइनरी उत्पाद, खाद, इस्पात, सीमेंट तथा विद्युत। इन आठों कोर उद्योगों का औद्योगिक उत्पादन सूचकांक में सामूहिक भार 40.27 प्रतिशत है।

सारणी 8.5

औद्योगिक उत्पादन सूचकांक का भार प्रारूप

(औद्योगिक उत्पादन क्षेत्रक)

क्षेत्रक	भार (प्रतिशत में)
खनिज	14.4
विनिर्माण	77.6
विद्युत	8.0
सामान्य सूचकांक	100.0

स्रोतः सांख्यिकी मंत्रालय एवं कार्यक्रम क्रियान्वयन, 2016-17

औद्योगिक उत्पादन सूचकांक 'उत्पाद के उपयोग' के अनुसार भी उपलब्ध है, जैसे 'प्राथमिक वस्तुएँ', 'उपभोक्ता टिकाऊ वस्तुएँ' आदि।

सारणी 8.6

औद्योगिक उत्पादन सूचकांक का भार प्रारूप

(उपयोग के आधार पर समूह)

समूह	भार (प्रतिशत में)
प्राथमिक	34.1
पूंजीगत माल	8.2
मध्यवर्ती माल	17.2
अर्धसंरचना/निर्माणी माल	12.3
उपभोक्ता टिकाऊ वस्तुएँ	12.8
उपभोक्ता गैर-टिकाऊ वस्तुएँ	15.3
सामान्य सूचकांक	100.0

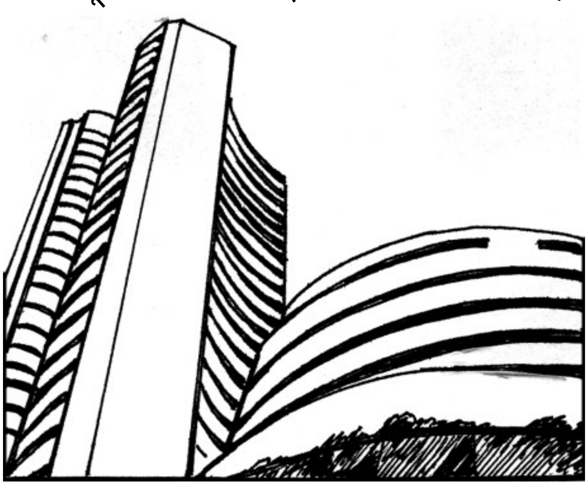
स्रोतः सांख्यिकी मंत्रालय एवं कार्यक्रम क्रियान्वयन, 2016-17

मानव विकास सूचकांक

मानव विकास सूचकांक एक और लाभदायक सूचकांक है, जिसको एक देश के विकास के अध्ययन के लिए उपयोग किया जाता है। इसके विषय में आपने कक्षा 10 में पढ़ा होगा।

संवेदी सूचकांक (Sensex)

सेंसेक्स मुंबई स्टॉक एक्सचेंज संवेदी सूचकांक का संक्षिप्त रूप है, जिसका आधार वर्ष 1978-79 है। संवेदी सूचकांक का मान इस अवधि के संदर्भ में होता



है। भारतीय स्टॉक मार्केट के लिए यह मुख्य निर्देश चिह्न सूचकांक है। इसके अंतर्गत 30 स्टॉक हैं,

जो अर्थव्यवस्था के 13 क्षेत्रकों का प्रतिनिधित्व करते हैं तथा सूचीकृत कंपनियाँ अपने-अपने उद्योगों में अग्रणी हैं। यदि संवेदी सूचकांक ऊपर चढ़ता है तो यह संकेत देता है कि बाजार ठीक चल रहा है और निवेशक इन कंपनियों से बेहतर आमदनी की आशा करते हैं। यह अर्थव्यवस्था की मूल दशा के प्रति निवेशकों के बढ़ते विश्वास को भी दर्शाता है।

5. सूचकांक की रचना में मुद्दे

सूचकांक की रचना करते समय कुछ महत्वपूर्ण मुद्दों को ध्यान में रखना चाहिएः

- आपको सूचकांक के उद्देश्य के बारे में स्पष्ट होने की आवश्यकता है। जब किसी को मूल्य सूचकांक की आवश्यकता हो तो, परिमाण सूचकांक का परिकलन अनुपयुक्त होगा।
- इसके अतिरिक्त, जब आप उपभोक्ता कीमत सूचकांक की रचना कर रहे हों तब विभिन्न उपभोक्ता समूहों के मद समान महत्व वाले नहीं होते हैं। पेट्रोल की कीमत में वृद्धि शायद प्रत्यक्ष रूप से किसी निर्धन कृषि मजदूर की जीवन-स्थिति को प्रभावित नहीं करे। इसलिए किसी भी सूचकांक के लिए मदों का चयन सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए, ताकि जहाँ तक संभव हो सके, ये उनका (मदों का)

प्रतिनिधित्व कर सकें। केवल तभी आपको परिवर्तन की सही जानकारी प्राप्त हो सकेगी।

- प्रत्येक सूचकांक का एक आधार होना चाहिए। जहाँ तक संभव हो सके, यह आधार सामान्य होना चाहिए। आधार-अवधि के लिए चरम मानों को नहीं चुना जाना चाहिए। यह अवधि भी अतीत में अधिक दूर नहीं होनी चाहिए। 1993 और 2005 के बीच तुलना, 1960 और 2005 के बीच की तुलना से अधिक सार्थक होती है। 1960 की विशिष्ट उपभोक्ता टोकरी की बहुत सी मदें आज के दौर में विलुप्त हो चुकी हैं। इसलिए किसी भी सूचकांक के आधार वर्ष को नियमित रूप से अद्यतन किया जाता है।
- सूत्र के चुनाव का विषय भी है, जो अध्ययन किए जाने वाले प्रश्न की प्रकृति पर निर्भर करता है। लेस्पेयर के सूचकांक तथा पाशे के सूचकांक के बीच केवल इन सूत्रों में प्रयुक्त भारों की भिन्नता है।
- इसके अतिरिक्त भी आँकड़ों के अनेक स्रोत हैं जिनकी विश्वसनीयता भिन्न-भिन्न है। कम विश्वसनीयता के आँकड़े भ्रामक परिणाम देंगे। अतः आँकड़ों के संग्रह में उचित सावधानी बरती जानी चाहिए। यदि प्राथमिक आँकड़ों को प्रयुक्त नहीं किया जाता है, तो फिर सर्वाधिक विश्वसनीय द्वितीयक आँकड़ों के स्रोत का चुनाव किया जाना चाहिए।

क्रियाकलाप

- स्थानीय सब्जी बाजार से एक सप्ताह में कम से कम 10 मदों के आँकड़े एकत्र कीजिए। एक सप्ताह के लिए प्रतिदिन का कीमत सूचकांक बनाने का प्रयत्न कीजिए। कीमत सूचकांक की रचना में दोनों विधियों का अनुप्रयोग करने के क्रम में आप किन समस्याओं का सामना करते हैं?

6. अर्थशास्त्र में सूचकांक

हमें सूचकांक के उपयोग की आवश्यकता क्यों पड़ती है? थोक कीमत सूचकांक (WPI), उपभोक्ता कीमत सूचकांक (CPI) तथा औद्योगिक उत्पादन सूचकांक (IIP) का नीति-निर्माण में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है।

- उपभोक्ता कीमत सूचकांक (CPI) अथवा निर्वाह सूचकांक, मजदूरी समझौता, आय-नीति, कीमत-नीति, किराया-नियंत्रण, कराधान तथा सामान्य आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक होते हैं।

- थोक कीमत सूचकांक (WPI) का प्रयोग समुच्चयों की कीमतों में परिवर्तन जैसे कि राष्ट्रीय आय, पूँजी-निर्माण आदि के परिवर्तनों के प्रभाव को समाप्त करने के लिए किया जाता है।
- थोक कीमत सूचकांक (WPI) का प्रयोग सामान्य रूप से मुद्रास्फीति दर को मापने में किया जाता है। मुद्रास्फीति कीमतों में सामान्य तथा निरंतर वृद्धि को कहते हैं। यदि मुद्रास्फीति बहुत बढ़ जाती है, तो मुद्रा अपने पारंपरिक गुणों-जैसे विनिमय का साधन एवं लेखे की इकाई आदि को खो सकती है। इसका मुख्य प्रभाव मुद्रा के मूल्य में कमी का होना है। साप्ताहिक मुद्रास्फीति दर निम्न द्वारा प्राप्त होती है,

  $$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \times 100 \text{ यहाँ } X_t \text{ एवं } X_{t-1}$$

  tवें तथा $(t-1)$वें सप्ताहों के थोक कीमत सूचकांक को दर्शाते हैं।
- उपभोक्ता कीमत सूचकांक (CPI) का मुद्रा की क्रय शक्ति एवं वास्तविक मजदूरी के

परिकलन के लिए प्रयोग किया जाता है।

क) मुद्रा की क्रयशक्ति = 1/निर्वाह सूचकांक
ख) वास्तविक मजदूरी = (मौद्रिक मजदूरी/निर्वाह सूचकांक) × 100

यदि उपभोक्ता कीमत सूचकांक (1982=100) जनवरी 2005 में 526 है, तो जनवरी 2005 में एक रुपया का समतुल्य 100/526 = 0.19 रु होगा। इसका तात्पर्य यह है कि 1982 में जो एक रुपया था, अब 19 पैसे के बराबर हो गया है। यदि आज एक उपभोक्ता की मौद्रिक मजदूरी 10,000 रु है तो उसकी वास्तविक मजदूरी निम्नवत होगी,

$$10{,}000\text{रु} \times \frac{100}{526} = 1{,}901\text{रु}$$

इसका अभिप्राय है कि वर्ष 1982 में 1901 रु की क्रय शक्ति उतनी ही थी, जो जनवरी 2005 में 10,000 रु की है। यदि 1982 में वह 3000 रु प्राप्त कर रहा था, तो मूल्य-वृद्धि के हिसाब से वह बदतर स्थिति में है। अतः 1982 के जीवन-स्तर को बनाये रखने के लिए उसका वेतन बढ़ाकर 15,780 रु कर देना चाहिए, जिसे आधार-अवधि के वेतन को 526/100 के गुणांक द्वारा गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है।

- औद्योगिक उत्पादन सूचकांक हमें औद्योगिक क्षेत्र में उत्पादन में परिवर्तन के बारे में परिमाणात्मक अंक प्रदान करता है।
- कृषि उत्पादन सूचकांक हमें कृषि क्षेत्र के निष्पादन का तत्काल परिकलन प्रदान करता है।
- संवेदी सूचकांक स्टॉक मार्केट में निवेशकों के लिए उपयोगी मार्गदर्शक का काम करता है। यदि सूचकांक चढ़ता है तो निवेशक भावी अर्थव्यवस्था के निष्पादन की दिशा में आशावादी होते हैं। निवेश के लिए यह एक उपयुक्त समय होता है।

हमें ये सूचकांक कहाँ से मिल सकते हैं?

सामान्य रूप से प्रयोग होने वाले कुछ सूचकांक सर्वेक्षण, जो भारत सरकार जैसे थोक कीमत सूचकांक (WPI), उपभोक्ता कीमत सूचकांक (CPI), प्रमुख फसलों के उत्पादन सूचकांक, औद्योगिक उत्पादन सूचकांक तथा विदेशी व्यापार सूचकांक आदि आर्थिक सर्वेक्षण में उपलब्ध हैं।

क्रियात्मक गतिविधि

- समाचार-पत्रों की जाँच कर 10 प्रेक्षणों के साथ संवेदी सूचकांक की एक काल श्रेणी बनाइये। अगर उपभोक्ता कीमत-सूचकांक का आधार वर्ष 1982 से बदलकर 2000 कर दिया जाए तब क्या होगा?

7. सारांश

सूचकांक का आकलन आपको मदों में बड़ी संख्याओं में परिवर्तनों को एकल माप के द्वारा परिकलित करने के योग्य बनाती है। सूचकांकों का परिकलन कीमत, मात्रा, आदि के लिए किया जा सकता है। सूत्रों से यह भी स्पष्ट है कि सूचकांक की रचना से प्राप्त अंकों को सावधानी के साथ निर्वचन की आवश्यकता होती है। इसके साथ ही, शामिल किए जाने वाले मदों एवं आधार-अवधि का चुनाव महत्वपूर्ण है। उनके विभिन्न प्रयोगों से पता चलता है कि सूचकांक नीति-निर्माण में अत्यधिक महत्वपूर्ण होते हैं।

पुनरावर्तन

- बड़ी संख्या के मदों के सापेक्षिक परिवर्तनों को मापने के लिए सूचकांक एक सांख्यिकीय विधि है।
- सूचकांकों की रचना के लिए कई सूत्र हैं, और प्रत्येक सूत्र के निर्वचन में सावधानी की आवश्यकता होती है।
- सूचकांक हेतु सूत्र का चुनाव अधिकांशतः अभिरुचि के प्रश्न पर निर्भर होता है।
- व्यापक रूप से प्रयुक्त होने वाले सूचकांक हैं, थोक कीमत सूचकांक, उपभोक्ता कीमत सूचकांक, औद्योगिक उत्पादन सूचकांक, कृषि उत्पादन सूचकांक तथा संवेदी सूचकांक।
- सूचकांक आर्थिक नीति-निर्माण के लिए अपरिहार्य होते हैं।

अभ्यास

1. मदों के सापेक्षिक महत्व को बताने वाले सूचकांक को,
   (क) भारित सूचकांक कहते हैं
   (ख) सरल समूहित सूचकांक कहते हैं
   (ग) सरल मूल्यानुपातों का औसत कहते हैं
2. अधिकांश भारित सूचकांकों में भार का संबंध,
   (क) आधार वर्ष से होता है
   (ख) वर्तमान वर्ष से होता है
   (ग) आधार एवं वर्तमान वर्ष दोनों से होता है
3. ऐसी वस्तु जिसका सूचकांक में कम भार है, उसकी कीमत में परिवर्तन से सूचकांक में कैसा परिवर्तन होगा,
   (क) कम
   (ख) अधिक
   (ग) अनिश्चित
4. कोई उपभोक्ता कीमत सूचकांक किस परिवर्तन को मापता है?
   (क) खुदरा कीमत
   (ख) थोक कीमत
   (ग) उत्पादकों की कीमत
5. औद्योगिक श्रमिकों के लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक में किस मद के लिए उच्चतम भार होता है?
   (क) खाद्य-पदार्थ
   (ख) आवास
   (ग) कपड़े
6. सामान्यतः मुद्रा-स्फीति के परिकलन में किसका प्रयोग होता है?
   (क) थोक कीमत सूचकांक
   (ख) उपभोक्ता कीमत सूचकांक
   (ग) उत्पादक कीमत सूचकांक

7. हमें सूचकांक की आवश्यकता क्यों होती है?
8. आधार अवधि के वांछित गुण क्या होते हैं?
9. भिन्न उपभोक्ताओं के लिए भिन्न उपभोक्ता कीमत सूचकांकों की अनिवार्यता क्यों होती है?
10. औद्योगिक श्रमिकों के लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक क्या मापता है?
11. कीमत सूचकांक तथा मात्रा सूचकांक में क्या अंतर है?
12. क्या किसी भी तरह का कीमत परिवर्तन एक कीमत सूचकांक में प्रतिबिंबित होता है?
13. क्या शहरी गैर-शारीरिक कर्मचारियों के लिए उपभोक्ता कीमत-सूचकांक भारत के राष्ट्रपति के निर्वाह लागत में परिवर्तन का प्रतिनिधित्व कर सकता है?
14. नीचे एक औद्योगिक केंद्र के श्रमिकों द्वारा 1980 एवं 2005 के दौरान निम्न मदों पर प्रतिव्यक्ति मासिक व्यय को दर्शाया गया है। इन मदों का भार क्रमशः 75, 10, 5, 6 तथा 4 है। 1980 को आधार मानकर 2005 के लिए जीवन निर्वाह लागत का एक भारित सूचकांक तैयार कीजिए।

मद	वर्ष 1980 में कीमत	वर्ष 2005 की कीमत
खाद्य पदार्थ	100	200
कपड़े	20	25
ईंधन एवं बिजली	15	20
मकान किराया	30	40
विविध	35	65

15. निम्नलिखित सारणी को ध्यानपूर्वक पढ़िए एवं अपनी टिप्पणी कीजिए-

औद्योगिक उत्पादन सूचकांक (आधार 1993-94)

उद्योग	भार % में	1996-1997	2003-2004
सामान्य सूचकांक	100	130.8	189.0
खनन एवं उत्खनन	10.73	118.2	146.9
विनिर्माण	79.58	133.6	196.6
विद्युत	10.69	122.0	172.6

16. अपने परिवार में उपभोग की जाने वाली महत्वपूर्ण मदों की सूची बनाने का प्रयास कीजिए।
17. यदि एक व्यक्ति का वेतन आधार वर्ष में 4000 रु प्रतिवर्ष था और उसका वर्तमान वर्ष में वेतन 6000 रु है। उसके जीवन-स्तर को पहले जैसा ही बनाए रखने के लिए उसके वेतन में कितनी वृद्धि होनी चाहिए, यदि उपभोक्ता कीमत सूचकांक 400 हो।
18. जून 2005 में उपभोक्ता कीमत सूचकांक 125 था। खाद्य सूचकांक 120 तथा अन्य मदों का सूचकांक 135 था। खाद्य पदार्थों को दिया जाने वाला भार कुल भार का कितना प्रतिशत है?

19. किसी शहर में एक मध्यवर्गीय पारिवारिक बजट में जाँच-पड़ताल से निम्नलिखित जानकारी प्राप्त होती हैः

मदों पर व्यय	खाद्य पदार्थ 35%	ईंधन 10%	कपड़ा 20%	किराया 15%	विविध 20%
2004 में कीमत (रु में)	1500	250	750	300	400
1995 में कीमत (रु में)	1400	200	500	200	250

1995 की तुलना में 2004 में निर्वाह सूचकांक का मान क्या होगा?

20. दो सप्ताह तक अपने परिवार के (प्रति इकाई) दैनिक व्यय, खरीदी गई मात्रा तथा दैनिक खरीददारी को अभिलेखित कीजिए। कीमत में आए परिवर्तन आपके परिवार को किस तरह से प्रभावित करते हैं?

21. निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हैं-

वर्ष	औद्योगिक श्रमिकों का *CPI* (1982 = 100)	कृषि श्रमिक का *CPI* (1986-87=100)	थोक कीमत सूचकांक (1993-94=100)
1995-96	313	234	121.6
1996-97	342	256	127.2
1997-98	366	264	132.8
1998-99	414	293	140.7
1999-00	428	306	145.3
2000-01	444	306	155.7
2001-02	463	309	161.3
2002-03	482	319	166.8
2003-04	500	331	175.9

स्रोतः आर्थिक सर्वेक्षण, भारत सरकार, 2004-2005

(क) सूचकांकों के सापेक्षिक मानों पर टिप्पणी कीजिए।

(ख) क्या ये तुलना योग्य हैं?

22. एक परिवार का कुछ महत्वपूर्ण मदों पर मासिक व्यय तथा उन पर लागू वस्तु एवं सेवा कर (GST) इस प्रकार हैः

मद	मासिक व्यय (रु.)	वस्तु एवं सेवा कर की दर (%)
अनाज	1500	0
अण्डा	250	0
मछली, मीट	250	0
दवाइयाँ	50	5
बायो गैस	50	5
यातायात	100	5
मक्खन	50	12
बबूल टूथपेस्ट	10	12
टमाटर कैचप	40	12

बिस्किट	75	18
केक, पेस्ट्री	25	18
ब्रांडेड वस्त्र	100	18
धुलाई मशीन, वैक्यूम क्लीनर, कार	1000	18

इस परिवार के लिए औसत कर दर की गणना करें।

वस्तु एवं सेवा कर (जी.एस.टी.) की औसत दर ज्ञात करने के लिए भारित माध्य के सूत्र का उपयोग किया जाता है। इस स्थिति में, वस्तुओं के प्रत्येक वर्ग पर किया गया कुल व्यय का भाग ही भार है। कुल भार, परिवार द्वारा किए गए कुल व्यय के बराबर है। तथा चर जी.एस.टी. दरें हैं।

वर्ग	व्यय भार (W)	जी.एस.टी. दर (X)	WX
वर्ग 1	2000	0	0
वर्ग 2	200	0.25	10
वर्ग 3	100	0.12	12
वर्ग 4	200	0.18	36
वर्ग 5	1000	0.28	280
		3500	338

इस परिवार के लिए माध्य जी.एस.टी. दर, $\frac{338}{3500} = 0.966$, अर्थात् 9.66% है।

क्रियात्मक गतिविधियाँ

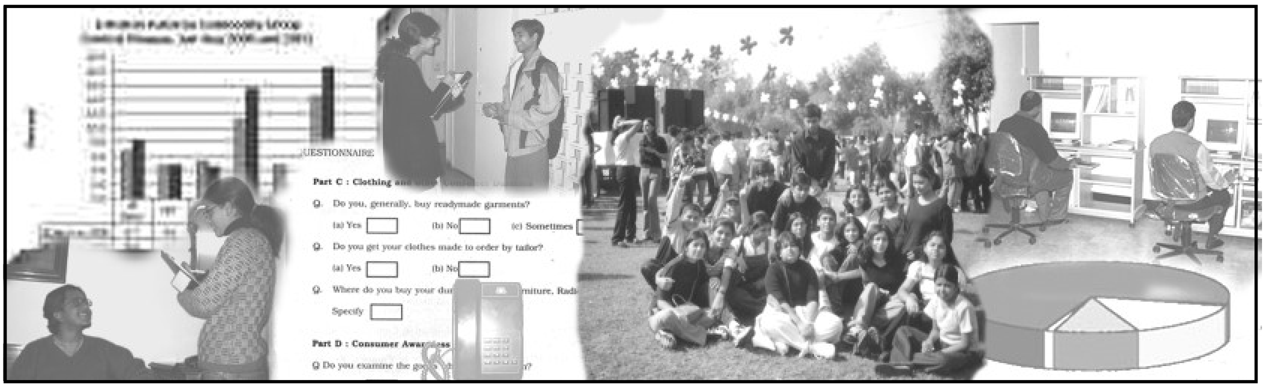
- सामान्य रूप से प्रयुक्त होने वाले सूचकांक की सूची बनाने हेतु अपने शिक्षक से परामर्श प्राप्त करें। स्रोत को अंकित करते हुए नवीनतम आँकड़े प्राप्त करें। क्या आप बता सकते हैं कि एक सूचकांक की इकाई क्या होती है?
- गत 10 वर्षों के लिए औद्योगिक श्रमिकों के लिए उपभोक्ता कीमत सूचकांक की एक सारणी बनाइए तथा मुद्रा की क्रय-शक्ति का परिकलन कीजिए। यह कैसे परिवर्तित हो रही है?

11099CH09

अध्याय

9

सांख्यिकीय विधियों के उपयोग



इस अध्याय को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे किः
- किसी परियोजना के निर्माण के चरणों से परिचित हो सकें;
- किसी समस्या के विश्लेषण के लिए विविध सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग सीख सकें।

1. प्रस्तावना

आपने विविध प्रकार की सांख्यिकीय विधियों के बारे में पढ़ा है। ये विधियाँ हमारे दैनिक जीवन के लिए महत्वपूर्ण होती हैं और साथ ही आर्थिक गतिविधियों जैसे उत्पादन, उपभोग, वितरण, बैंकिंग, बीमा, व्यापार एवं परिवहन आदि से संबंधित आँकड़ों के विश्लेषण में उपयोगी होती हैं। इस अध्याय में, आप किसी परियोजना को तैयार करने की विधि के बारे में जानेंगे। इससे आप यह समझ सकेंगे कि किस प्रकार सांख्यिकीय विधियों को विभिन्न प्रकार के विश्लेषणों में प्रयुक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, आप उपभोक्ताओं से किसी उत्पाद के बारे में या बाजार में किसी उत्पादक द्वारा शुरू किये गए किसी नए उत्पाद या सेवा के बारे में या विद्यालयों में सूचना-तकनीक के प्रसार के बारे में या ऐसा ही कोई और विश्लेषण कर सकते हैं। सर्वेक्षण द्वारा किसी उत्पाद या प्रणाली को बेहतर बनाने के लिए सूचनाएँ एकत्र कर रिपोर्ट तैयार करने में सहायता मिलती है।

परियोजना के चरण

अध्ययन के क्षेत्र या समस्या को पहचानना

सबसे पहले आपको इस बारे में बिल्कुल स्पष्ट होना चाहिए कि आपके अध्ययन का उद्देश्य क्या है। अपने उद्देश्य के आधार पर आप

आँकड़ों के संग्रह एवं संसाधन की दिशा में आगे बढ़ेंगे। उदाहरण के लिए, कार, मोबाइल-फोन, जूता-पॉलिश, नहाने के साबुन या कपड़ा धोने के पाउडर आदि किसी भी उत्पाद का उत्पादन या बिक्री आपके अध्ययन का क्षेत्र हो सकता है। आप संभवतः किसी क्षेत्र विशेष के निवासियों की बिजली या पानी की समस्या का हल निकालना चाहते हों। आप परिवारों के बीच उपभोक्ता जागरूकता अर्थात् 'उपभोक्ताओं के अधिकारों के बारे में जागरूकता' के बारे में अध्ययन करना चाह सकते हैं।

लक्ष्य समूह का चुनाव

अध्ययन के लिए उपयुक्त प्रश्नों की एक प्रश्नावली बनाने के लिए लक्षित समूह का चुनाव बहुत महत्वपूर्ण होता है। यदि आप की परियोजना कार से संबंधित है, तब आपका लक्ष्य-समूह मुख्यतः मध्यम आय वर्ग या उच्च आय वर्ग होगा। उपभोक्ता उत्पाद, जैसे साबुन, आदि से जुड़े अध्ययन के लिए, आपको ग्रामीण एवं शहरी उपभोक्ताओं को अपना लक्ष्य बनाना होगा। सुरक्षित पेयजल की उपलब्धता के अध्ययन हेतु आप ग्रामीण एवं शहरी आबादी दोनों को ही अपना लक्ष्य बना सकते हैं। इसलिए, लक्षित समूह का चुनाव, अर्थात् उस समूह की पहचान करना जिस पर आपको ध्यान केंद्रित करना है, किसी भी परियोजना की रिपोर्ट तैयार करने के क्रम में बहुत ही महत्वपूर्ण चरण है।

आँकड़ों का संकलन

सर्वेक्षण का उद्देश्य यह तय करने में सहायक होगा कि प्राथमिक आँकड़ों का उपयोग किया जाए या द्वितीयक आँकड़ों का या दोनों का। आप अध्याय 2 में पढ़ ही चुके हैं कि पहली बार आँकड़ों का संग्रह प्राथमिक विधि के उपयोग द्वारा किया जा सकता है, जिसके लिए किसी प्रश्नावली या साक्षात्कार अनुसूची का प्रयोग कर व्यक्तिगत साक्षात्कार, डाक सर्वेक्षण, फोन, ई-मेल आदि के द्वारा आँकड़ें संगृहीत किए जा सकते हैं। डाक प्रश्नावली के साथ एक आवरण-पत्र भी भेजा जाना चाहिए, जो पूछ-ताछ के उद्देश्य का विवरण देता हो। लक्ष्य समूह का आकार एवं विशेषता आपके उद्देश्य पर आधारित होती है। उदाहरण के लिए, महिला साक्षरता या विशेष प्रकार के ब्रांड या साबुन की खपत से संबंधित अध्ययन के लिए आपको प्रत्येक परिवार या घर से जानकारी लेनी होगी। यदि आपने संपर्क संकलन के लिए प्रतिदर्श पद्धति को चुना है, तो प्रतिदर्श विधि के प्रयोग की उपयुक्तता के प्रति सावधानी बर्तनी होगी।

द्वितीयक आँकड़े सूचनाएँ उपलब्ध करा सकते हैं, यदि ये आपकी आवश्यकताओं के अनुकूल हों। द्वितीयक आँकड़ों का प्रयोग प्रायः तब किया जाता है, जब समय, धन, एवं मानव-संसाधन की कमी हो या सूचनाएँ आसानी से उपलब्ध हों। यदि आँकड़े संकलन के लिए प्रतिदर्श विधि का उपयोग किया गया है, तो इसका ध्यान रखा जाना चाहिए कि यह उपयुक्त है या नहीं।

आँकड़ों का संगठन एवं प्रस्तुतीकरण

आँकड़ा-संग्रह के बाद, प्राप्त सूचनाओं को संसाधित करने की जरूरत होती है, जिसे सारणीयन एवं उपयुक्त आरेखों, जैसे दंड-आरेख, वृत्त-आरेख आदि द्वारा संगठित एवं प्रस्तुत किया जा सकता है, जिसके बारे में आप अध्याय 3 एवं 4 में पढ़ चुके हैं।

विश्लेषण एवं व्याख्या

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप (जैसे-माध्य), परिक्षेपण के माप (जैसे मानक विचलन) और सहसंबंध आपको औसत, प्रसरणशीलता तथा सहसंबंधों (यदि ये विद्यमान हैं) के परिकलन के योग्य बनाएँगे। आप इन सभी मापों के बारे में अध्याय 5, 6 एवं 7 में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं।

उपसंहार

आखिरी चरण में विश्लेषण के बाद परिणामों की व्याख्या करनी होगी। यदि संभव हो तो विकास तथा सरकारी नीतियों आदि के विषय में संकलित आँकड़ों के आधार पर **भावी परिदृश्य** के पूर्वानुमान लगाने तथा सुझाव देने का प्रयास करें।

ग्रंथ सूची

इस अनुभाग में, आपको उन सभी द्वितीयक स्रोतों जैसे पत्रिकाओं, समाचार-पत्रों, शोध रिपोर्टों आदि के बारे में विवरण देने की जरूरत होती है, जिनका प्रयोग आपने परियोजना बनाते समय किया था।

2. परियोजनाओं की प्रस्तावित सूची

यहाँ पर उदाहरण हेतु कुछ परियोजनाओं का सुझाव दिया जा रहा है। आप इनमें से कोई भी शीर्षक/ विषय- वस्तु चुन सकते हैं, जो आर्थिक मुद्दों से संबद्ध हो।

1. स्वयं को ऐसे परिवहन मंत्री का सलाहकार मानकर, जिसका उद्देश्य बेहतर एवं समन्वित परिवहन व्यवस्था को लाने का है, एक परियोजना रिपोर्ट तैयार कीजिए।
2. आप शायद किसी ग्रामीण कुटीर उद्योग में कार्यरत हों, जो धूप, अगरबत्ती, मोमबत्ती तथा जूट उत्पाद बनाने वाला हो सकता है। अब आप अपना स्वयं का काम शुरू करना चाहते हैं। बैंक द्वारा ऋण पाने के लिए एक परियोजना प्रस्ताव तैयार करें।
3. मान लीजिए आप एक कंपनी में बाजार-प्रबंधक हैं और हाल ही में आपने अपनी कंपनी के एक उपभोक्ता उत्पाद का विज्ञापन दिया है। अपने उत्पाद की बिक्री पर विज्ञापन के प्रभाव के विषय में परियोजना रिपोर्ट तैयार करें।
4. आप एक जिला शिक्षा अधिकारी हैं, जो अपने जिले में साक्षरता स्तर का मूल्यांकन तथा बच्चों के विद्यालय से पढ़ाई छोड़ने का कारण जानना चाहता है। एक रिपोर्ट तैयार कीजिए।
5. मान लीजिए, आप एक क्षेत्र विशेष में सतर्कता-अधिकारी के रूप में नियुक्त हैं और आपको विक्रेताओं द्वारा सामानों की अधिक कीमत लेने की शिकायत मिलती है, अर्थात् अधिकतम खुदरा कीमत से अधिक कीमत वसूलने की शिकायत। आप कुछ दुकानों का दौरा करें और शिकायत के संबंध में एक रिपोर्ट तैयार करें।
6. मान लें कि आप किसी ग्राम के मुखिया (ग्राम-पंचायत के प्रधान) हैं, जो मूलभूत संसाधन, जैसे लोगों के लिए सुरक्षित पेयजल, उपलब्ध कराना चाहते हैं। आप संबद्ध मुद्दों को एक रिपोर्ट के रूप में प्रस्तुत करें।
7. स्थानीय सरकार के प्रतिनिधि के रूप में, आप अपने क्षेत्र की विभिन्न रोजगार-योजनाओं में महिलाओं की भागीदारी का मूल्यांकन करना चाहते हैं। एक परियोजना-रिपोर्ट तैयार करें।
8. आप एक ग्राम-विकास खंड के मुख्य चिकित्सा-अधिकारी हैं। परियोजना के माध्यम से संबद्ध मुद्दों की पहचान करें। इसमें उस क्षेत्र की स्वास्थ्य एवं स्वच्छता संबंधी समस्याएँ शामिल की जा सकती हैं।
9. खाद्य एवं नागरिक-पूर्ति विभाग के मुख्य निरीक्षक होने के नाते, आपको अपने कार्य क्षेत्र में खाद्य मिलावट के बारे में शिकायत मिली है। समस्या की गंभीरता जानने के लिए एक सर्वेक्षण कीजिए।
10. किसी क्षेत्र विशेष में पोलियो प्रतिरक्षा कार्यक्रम

पर एक रिपोर्ट तैयार कीजिए।

11. आप एक बैंक अधिकारी हैं। आप लोगों की आय एवं व्यय को ध्यान में रखते हुए उनकी बचत संबंधी आदतों के बारे में एक सर्वेक्षण करना चाहते हैं। एक रिपोर्ट तैयार कीजिए।
12. मान लीजिए आप किसी छात्र समूह का एक अंग हैं, जो किसी गाँव में किसानों की कृषि-गतिविधियों एवं कठिनाइयों का अध्ययन करना चाहता है। एक परियोजना रिपोर्ट बनाएँ।

3. **प्रतिदर्श परियोजना**

आपके मार्गदर्शन के लिए एक प्रतिदर्श परियोजना दी जा रही है। विधि का प्रयोग, आपके अध्ययन विषय पर निर्भर करेगा अैर यहाँ प्रयोग की गई विधि से स्पष्ट तथा भिन्न होगा।

परियोजना

X एक उद्यमी है जो 'टूथपेस्ट' बनाने के लिए एक कारखाना डालना चाहता है। आपसे कहा जाता है कि आप X को राय दें कि उसे किस प्रकार आगे बढ़ना चाहिए।

सबसे प्रथम कार्य जो आप करेंगे यह होगा कि आप लोगों की टूथपेस्ट के प्रति रुचियों, टूथपेस्ट पर उनके मासिक व्यय तथा अन्य प्रासंगिक तथ्यों का अध्ययन करेंगे। इसके लिए आप प्राथमिक समंकों को संग्रहित करने का निर्णय ले सकते हैं।

समंकों को एक प्रश्न सूची की सहायता से संग्रहित किया जाएगा। जो भी प्रश्न सूची आप प्रयोग करें, वह उन सभी सूचनाओं को जो आप अपने अध्ययन के लिए चाहते हैं, प्रदान करने में सक्षम होनी चाहिए। मान लीजिए कि सबसे महत्वपूर्ण सूचना जो आपके अध्ययन के लिए आवश्यक है, निम्न प्रकार है-

- टूथपेस्ट पर औसत मासिक व्यय
- वर्तमान में टूथपेस्टों के प्रचलित ब्रांड्स
- इन ब्रांडों के प्रति ग्राहकों की अभिरुचि
- टूथपेस्टों के संघटक के प्रति ग्राहकों की अभिरुचियाँ,
- टूथपेस्टों की माँग पर, प्रमुख जनसंचार प्रभाव
- आय तथा उपरोक्त कारकों के मध्य संबंध

यदि आपके पास कोई ऐसी प्रश्न सूची उपलब्ध है जिसका पूर्व में प्रयोग किया जा चुका है (शायद किसी समरूप अध्ययन के लिए), आप उसको अपनी आवश्यकतानुसार संशोधित करके प्रयोग कर सकते हैं। अन्यथा आपको प्रश्न सूची स्वयं बनानी पड़ेगी, यह सुनिश्चित करते हुए कि समस्त आवश्यक सूचना मांगी जा चुकी है।

सांख्यिकीय विधियों का उपयोग

इस परियोजना रिपोर्ट में प्रयोग किए जाने वाली सूची के उदाहरण

1. नामः ....
2. लिंगः ....
3. पारिवारिक सदस्यों की आयु (वर्षों में)
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. परिवार में सदस्यों की कुल संख्याः ....
5. परिवार की मासिक आयः ....
6. निवास का स्थानः शहरी ☐
   ग्रामीण ☐
7. मुख्य जीविका उपार्जक का प्रमुख व्यवसायः
   (i) सेवा ☐
   (ii) व्यवसाय ☐
   (iii) विनिर्माण ☐
   (iv) व्यापारी ☐
   (v) अन्य (कृपया स्पष्ट करें) ☐
8. क्या आपका परिवार दाँत साफ करने के लिए टूथपेस्ट का प्रयोग करता हैः
   हाँ ☐ नहीं ☐
9. यदि हाँ, तो आपके अनुसार, एक अच्छे टूथपेस्ट के कौन-से आवश्यक गुण होने चाहिए? (आप एक से अधिक विकल्प को टिक कर सकते हैं):
   (i) प्लेन ☐
   (ii) जैल ☐
   (iii) एंटीसेप्टिक ☐
   (iv) फ्लेवर्ड ☐
   (v) केवीटी.ज प्रोटेक्शन ☐
   (vi) फ्लोराइड ☐
   (vii) अन्य ☐
10. यदि हाँ, आप टूथपेस्ट का कौन-सा ब्रांड प्रयोग करते हैं? ....
11. आप इस टूथपेस्ट के 100 ग्राम के कितने पैक प्रति माह प्रयोग करते हैं? ....
12. क्या आप इस टूथपेस्ट से संतुष्ट हैं?
    हाँ / नहीं
13. क्या आप कोई नया टूथपेस्ट प्रयोग करने को तैयार हैं?
    हाँ/नहीं
14. यदि हाँ, तो अन्य नये टूथपेस्ट में किन प्रतिलक्षणों को चाहेंगे?
    (i)प्लेन ☐
    (ii) जैल ☐
    (iii) एंटीसेप्टिक ☐
    (iv) फ्लेवर्ड ☐
    (v) केवीटी.ज प्रोटेक्शन ☐
    (vi) फ्लोराइड ☐
    (vii)अन्य ☐
15. टूथपेस्ट की जानकारी के विषय में आपके प्रमुख स्रोत क्या हैं?
    (i)सिनेमा ☐
    (ii) प्रदर्शनियाँ ☐
    (iii) इंटरनेट ☐
    (iv) पत्रिकाएँ ☐
    (v) समाचार-पत्र ☐
    (vi) रेडियो ☐
    (vii)विपणन प्रतिनिधि ☐
    (viii)टेलीवि.जन ☐
    (ix) अन्य ☐

आँकड़ों का विश्लेषण तथा निर्वचन

आवश्यक सूचनाएँ एकत्रित करने के पश्चात्, अब आपको आँकड़ों को संगठित एवं वर्गीकृत करना होगा। अंतिम रिपोर्ट निम्न प्रकार हो सकती है-

सरलीकृत परियोजना रिपोर्ट का उदाहरण

1. कुल प्रतिदर्श की संख्या : 100 गृहस्थ

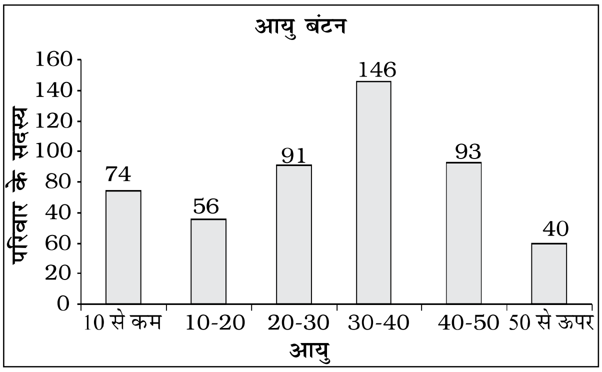
2. स्थानः शहरी : 67 प्रतिशत

ग्रामीण : 33 प्रतिशत

प्रेक्षणः अधिकांश प्रयोक्ता नगरीय क्षेत्र से थे।

3. **आयु वितरण**

आयु (वर्षों में)	व्यक्तियों की संख्या
10 वर्ष से कम	74
10-20	56
20-30	91
30-40	146
40-50	93
50 से अधिक	40
योग	500

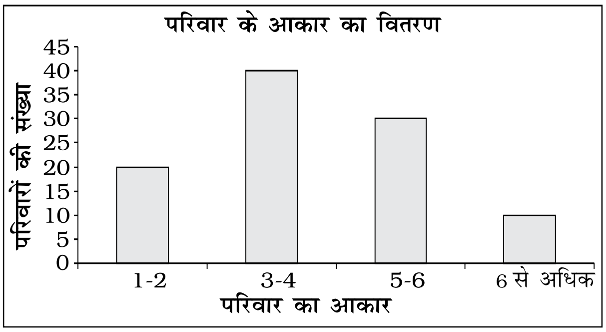


चित्र 9.1 दंड-आरेख

प्रेक्षणः सर्वेक्षण किए गए बहुसंख्यक लोग 20-50 आयु-वर्ग से थे।

4. **परिवार का आकार**

परिवार के आकार	परिवारों की संख्या
1-2	20
3-4	40
5-6	30
6 से अधिक	10
योग	100



चित्र 9.2 दंड-आरेख

प्रेक्षणः सर्वेक्षण किए गए अधिकांश परिवारों में 3-6 सदस्य थे।

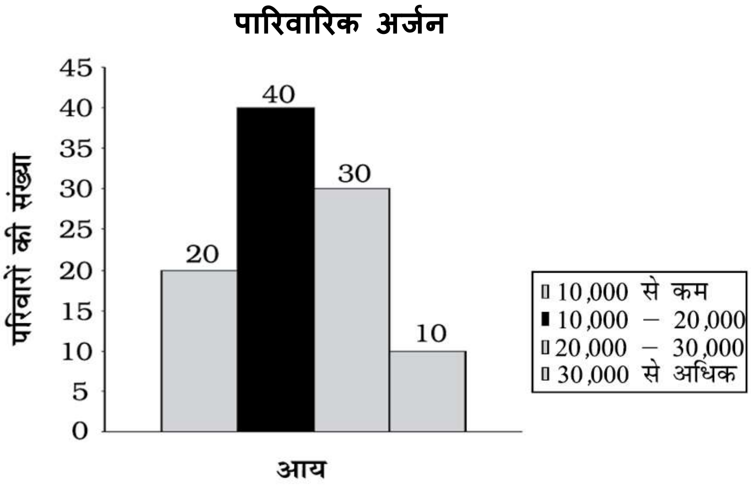
5. **परिवार की मासिक आय प्रस्थिति**

आय	परिवारों की संख्या
10,000 से कम	20
10,000-20,000	40
20,000-30,000	30
30,000 से अधिक	10

उपरोक्त समंकों का आयत चित्र नीचे दिया गया है।

मासिक पारिवारिक आय का बारंबारता वितरण तथा माध्य एवं मानक विचलन की गणना

आय वर्ग (1)	मध्य बिंदु x (2)	बारंबारता f (3)	$d' = (X-20000)/5000$ (4)	fd' (5)	fd'^2 (6)
0-10000	5000	20	-3	-60	180
10000-20000	15000	40	-1	-40	40
20000-30000	25000	30	1	30	30
30000-40000	35000	10	3	30	90
		100		-40	340



चित्र 9.3 आयत-चित्र

प्रेक्षणः सर्वेक्षण किए गए अधिकतर परिवारों की मासिक आय 10,000 से 30,000 के बीच थी।

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d'}{\sum f} \times c = 2000 + \frac{(-40)}{100} \times 5000$$

$$= 2000 - 2000 = 18000$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{340}{100} - \left(\frac{-40}{100}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{3.40 - 0.16} \times 5000$$

$$= \sqrt{3.24} \times 5000$$

$$= 1.8 \times 5000$$

$$= 9000$$

माध्य आय 18000 तथा मानक विचलन 9000 था।

6. **टूथपेस्ट का मासिक बजट**

टूथपेस्ट पर मासिक पारिवारिक आय का बारंबारता वितरण तथा माध्य एवं मानक विचलन की गणना

आय वर्ग (1)	मध्य बिन्दु x (2)	बारंबारता f (3)	d'=(X–100)/40 (4)	fd' (5)	fd'^{2} (6)
0-40	20	5	-2	-10	20
40-80	60	20	-1	-20	20
80-120	100	40	0	0	0
120-160	140	30	1	30	30
160-200	180	5	2	10	20
		100		10	90

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times c$$

$$= 100 + \frac{10}{100} \times 40$$

$$= 40$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}\right)^2} \times 40$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{80}{100} - \left(\frac{10}{100}\right)^2} \times 40$$

$$= \sqrt{0.8 - 0.01} \times 40$$

$$= \sqrt{0.79} \times 40$$

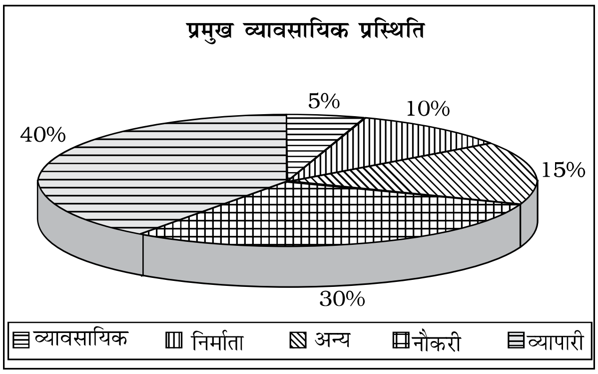
$$= 0.89 \times 40$$

$$= 35.6$$

टूथपेस्ट पर प्रति गृहस्थ मासिक व्यय 104 रुपये तथा मासिक विचलन 35.60 रुपये था।

7. **प्रमुख व्यावसायिक प्रस्थिति**

परिवार का व्यवसाय	परिवारों की संख्या
सेवा (नौकरी-पेशा)	30
व्यावसायिक	5
विनिर्माता	10
व्यापारी	40
अन्य (कृपया बताएँ)	15



चित्र 9.4 वृत्त दंड-आरेख

प्रेक्षणः सर्वेक्षण किए गए परिवारों में से अधिकांश सेवा-वर्ग या व्यापारी वर्ग के थे।

8. **प्रयोग किए जाने वाले टूथपेस्ट**

ब्रांड	इकाई	ब्रांड	इकाई
एक्वाफ्रेश	5	एंकर	4
सिबाका	9	बबूल	3
क्लोज़अप	12	प्रोमिस	3
कोलगेट	18	मेसवाक	5
पेप्सोडेंट	20	ओरल बी	7
पर्ल	4	संसोडाइन	7
अन्य	3		

प्रेक्षणः पेप्सोडेंट, कोलगेट, क्लोज़अप अधिक पसंद किए जाने वाले टूथपेस्ट थे।

9. **चयन का आधार**

विशेषताएँ	परिवारों की संख्या
विज्ञापन	15
दाँतों के डॉक्टर द्वारा प्रेरित	5
कीमत	35
गुणवत्ता	45
स्वाद	20
संघटक सामग्री	10
मानकता चिन्ह	50
नये उत्पाद को आ.जमाना	10
कंपनी ब्रांड	35

प्रेक्षणः अधिकांश लोगों ने मानक चिन्ह, गुणवत्ता कीमत तथा कंपनी ब्रांड के आधार पर चयन किया।

10. **स्वाद एवं प्राथमिकता**

विशेषताएँ	संतुष्ट	असंतुष्ट
एक्वाप्रेश	2	3
सिबाका	5	4
क्लोजअॅप	10	2
कोलगेट	16	2
मिसवाक	3	2

पेप्सोडेंट	18	2
एंकर	2	2
बबूल	2	1
प्रोमिस	2	1
ओरल बी	4	3
सेंसोडाइन	5	2
पर्ल	2	2

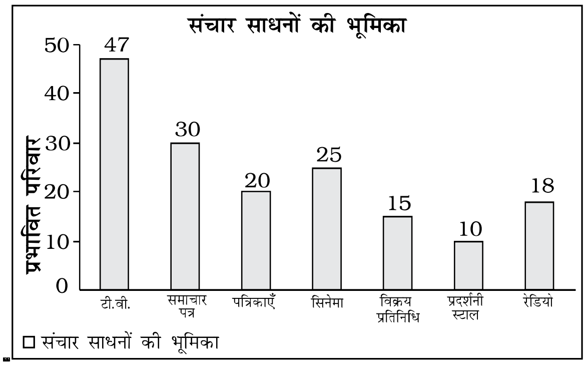
प्रेक्षणः सर्वाधिक प्रयोग किए जाने वाले टूथपेस्टों में, असंतुष्टी का प्रतिशत अपेक्षाकृत कम था।

11. **संघटक सामग्री की प्राथमिकता**	
सादा	40
जेल	70
एंटीसेप्टिक	80
सुगंधित	50
कैरीज संरक्षक	30
फ्लोराइड	10

प्रेक्षणः अधिकांश लोगों ने जेल तथा एंटीसेप्टिक टूथपेस्ट को अन्य टूथपेस्टों की अपेक्षा अधिक पसंद किया।

12. **संचार साधनों का प्रभाव**

विज्ञापन	प्रभावित परिवार
टेलीविजन	47
समाचार-पत्र	30
पत्रिकाएँ	20
सिनेमा	25
विक्रय प्रतिनिधि	15
प्रदर्शनी स्टाल	10
रेडियो	18



चित्र 9.5 दंड-आरेख

प्रेक्षणः अधिसंख्य लोगों को उत्पाद के बारे में टेलीविजन या समाचार-पत्रों के माध्यम से जानकारी मिली।

13 **परियोजना रिपोर्ट की संक्षिप्त टिप्पणी**

बहुसंख्य लोग शहरी क्षेत्रों से थे। सर्वेक्षण किए गए अधिकतर लोग 25 वर्ष से 50 वर्ष की आयु-वर्ग से थे तथा उनके परिवार में औसतन 3-6 सदस्य थे। इन परिवारों की मासिक आय 10,000 रु से 30,000 रु के बीच थी और वे मुख्यतः सेवा-वर्ग (नौकरी-पेशा) एवं व्यापारी वर्ग के थे। टूथपेस्ट पर व्यय परिवार के प्रसाधन बजट का प्रमुख अंग था। पारिवारिक सर्वेक्षण में पेप्सोडेंट, कोलगेट तथा क्लोजअप अधिक पसंद किए जाने वाले ब्रांड थे। माध्य के परिकलन द्वारा यह पाया गया कि लगभग 100 ग्राम टूथपेस्ट के पैक की औसत कीमत 29 रु थी। लोगों ने उस ब्रांड के टूथपेस्ट को प्राथमिकता दी, जो अस्थिक्षय संरक्षक या एंटीसेप्टिक थे। अधिकांश लोग विज्ञापनों से प्रभावित हुए थे तथा लोगों के बीच सर्वाधिक लोकप्रिय संचार माध्यम टेलीविजन था।

पुनरावर्तन

- अध्ययन के उद्देश्य की पहचान स्पष्ट रूप से की जानी चाहिए।
- जनसंख्या तथा प्रतिदर्श का चुनाव सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए।
- सर्वेक्षण के उद्देश्य से निर्धारित होता है कि किस प्रकार के आँकड़ों का प्रयोग किया जाना चाहिए।
- प्रश्नावली/साक्षात्कार अनुसूची तैयार की जानी चाहिए।
- संगृहीत किए गए आँकड़ों का विश्लेषण विभिन्न सांख्यिकीय विधियों के द्वारा किया जा सकता है।
- परिणामों का निर्वचन सार्थक निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए किया जाता है।

परिशिष्ट-अ

सांख्यिकीय पदों का पारिभाषिक शब्द-संग्रह

अर्थशास्त्रः व्यक्ति और समाज अपनी आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए तथा समाज के विभिन्न व्यक्तियों एवं समूहों में उपभोग हेतु वितरित करने के लिए इसका चुनाव कैसे करे कि वैकल्पिक प्रयोग वाले अल्प संसाधनों का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन में हो सके, **अर्थशास्त्र** इसका अध्ययन है।

अपवर्जी विधिः प्रेक्षणों के वर्गीकरण की ऐसी विधि, जिसमें किसी वर्ग की ऊपरी वर्ग सीमा के बराबर प्रेक्षण को उस वर्ग में न रखकर अगले वर्ग में रखा जाता है।

अप्रतिचयन त्रुटिः यह आँकड़ों के संग्रह में इन कारणों से उत्पन्न होती हैः (i) माप में त्रुटियाँ (ii) अभिलेखन की अशुद्धियाँ (iii) अनुत्तर।

आँकड़ेः किसी विषय पर बेहतर समझ अथवा निर्णय लेने के लिए विशेष सूचना प्राप्त करने के लिए व्यवस्थित क्रमबद्ध संख्याओं का समुच्चय (प्रायः बड़ी संख्या में)।

उपभोक्ताः जो अपनी स्वयं की आवश्यकताओं के लिए या अपने परिवार की आवश्यकताओं के लिए या किसी को उपहार देने के लिए वस्तुएँ खरीदता है।

एक विचर वितरणः एक चर का बारंबारता वितरण।

कल्पित माध्यः परिकलन को सरल बनाने के लिए कोई सन्निकट मान।

कालानुक्रमिक वर्गीकरणः समय पर आधारित वर्गीकरण।

काल श्रेणीः कालानुक्रमित रूप से व्यवस्थित आँकड़े अथवा दो-चर आँकड़े जिनमें समय एक चर है।

गुणः कोई लक्षण जिसकी प्रवृत्ति गुणात्मक है। इसे मापा नहीं जा सकता।

गणनाकारः ऐसा व्यक्ति जो आँकड़ों का संग्रह करता है।

गुणात्मक तथ्यः गुणों के संबंध में व्यक्त आर्थिक सूचना अथवा आँकड़े।

गुणात्मक वर्गीकरणः गुण पर आधारित वर्गीकरण। उदाहरण के लिए लिंग, वैवाहिक स्थिति आदि के अनुसार लोगों का वर्गीकरण।

चरः चर एक ऐसी मात्रा है जिसका प्रयोग किसी वस्तु अथवा व्यक्तियों के किसी गुण (जैसे ऊँचाई, भार, संख्या आदि) को मापने के लिए किया जाता है, जिसका मान भिन्न-भिन्न परिस्थितियों में भिन्न हो सकता है।

चक्रीयताः एक से अधिक वर्ष के समय अंतराल के लिए आँकड़ों के विचरण में आवर्तिता।

जनगणना विधिः आँकड़ा संग्रह की ऐसी विधि, जिसमें समष्टि के सभी व्यक्तियों से प्रेक्षण

लिए जाते हैं।

दुर्लभताः इसका अभिप्राय उपलब्धता में कमी से है।

दशमकः ऐसा विभागकारी मान जो आँकड़ों को दस समान भागों में बाँटता है।

द्विबहुलकी वितरणः ऐसा वितरण जिसमें दो बहुलक मान हों।

द्विचर वितरणः दो चरों का बारंबारता वितरण।

देशिक वर्गीकरणः भौगोलिक स्थिति के आधार पर वर्गीकरण।

परासः किसी चर के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों में अंतर।

प्रेक्षणः अपरिष्कृत आँकड़ों की कोई इकाई।

नीतिः किसी आर्थिक समस्या को हल करने का उपाय।

प्रतिचयन त्रुटिः यह प्राचल के आकलन तथा यथार्थ मान के बीच संख्यात्मक अंतर है।

प्रतिदर्श (सर्वेक्षण विधि)ः ऐसी विधि जिसमें समष्टि से चुने हुए प्रेक्षणों को व्यष्टियों के प्रतिनिधि समुच्चय (प्रतिदर्श) के आधार पर प्राप्त करने की आवश्यकता होती है।

प्रश्नावलीः अन्वेषण के विषय पर अन्वेषण द्वारा तैयार किए गए प्रश्नों की सूची। उत्तरदाता को प्रश्नों के उत्तर देने की आवश्यकता होती है।

बारंबारताः अपरिष्कृत आँकड़ों में किसी प्रेक्षण का बार-बार आना। किसी बारंबारता वितरण में इसका अभिप्राय है एक वर्ग में प्रेक्षणों की संख्या।

बारंबारता सरणीः किसी विविक्त चर का ऐसा वर्गीकरण, जो उनकी संगत बारंबारताओं सहित चर के विभिन्न मानों को दर्शाता है।

बारंबारता वक्रः बारंबारता वितरण का एक ऐसा आरेख जिसमें वर्ग चिह्नों के मान X-अक्ष पर तथा वर्ग की बारंबारताओं को Y-अक्ष पर आलेखित किया जाता है।

बारंबारता वितरणः मात्रात्मक चर का ऐसा वर्गीकरण, जो यह दर्शाता है कि चर के विभिन्न मान संगत वर्ग की बारंबारताओं सहित विभिन्न वर्गों में कैसे वितरित किए जाते हैं।

बहुबहुलकी वितरणः ऐसा वितरण जिसमें दो से अधिक बहुलक होते हैं।

भारित औसतः यहाँ आँकड़ों के भिन्न-भिन्न बिंदुओं को भिन्न-भिन्न भार देकर औसत का परिकलन किया जाता है।

मात्रात्मक तथ्यः संख्याओं में व्यक्त आर्थिक सूचना अथवा आँकड़े।

मिलान चिह्न अंकनः मिलान चिह्नों (/) का प्रयोग करके एक वर्ग में प्रेक्षणों की गिनती करना। मिलान चिह्नों को पाँच-पाँच में समूहीकृत किया जाता है।

मौसमीपनः एक वर्ष से कम समयावधि में आकड़ों के विचरण में आवर्तिता।

यादृच्छिक प्रतिचयनः यह प्रतिचयन की ऐसी विधि है जिसमें सूचकों के प्रतिनिधि समुच्चय का चयन इस प्रकार किया जाता है कि प्रत्येक व्यष्टि को सूचक के रूप में चुने जाने का समान अवसर दिया जाए।

वर्ग बारंबारताः किसी वर्ग में प्रेक्षणों की संख्या।

वर्ग-अंतरालः ऊपरी और निम्न वर्ग सीमाओं के बीच का अंतर।

वर्ग चिह्नः वर्ग का मध्य-बिंदु।

वर्ग का मध्य बिंदुः किसी वर्ग का मध्य मान उस वर्ग के विभिन्न प्रेक्षणों का प्रतिनिधि मान है। यह वर्ग की (ऊपरी सीमा + वर्ग की निम्न सीमा)/2 के बराबर होता है।

वर्गीकरणः समान वस्तुओं को समूहों अथवा वर्गों में व्यवस्थित करना।

विविक्त चरः ऐसा मात्रात्मक चर जिसमें कुछ निश्चित मान होते हैं। परिमित 'उछालों' द्वारा यह एक मान से दूसरे मान में परिवर्तित हो जाता है। चर में दो आसन्न मानों के बीच मध्यवर्ती मान सम्मिलित नहीं होते।

विश्लेषणः किसी आर्थिक समस्या को समझना एवं विभिन्न कारणों के संदर्भ में उसकी व्याख्या करना।

विक्रेताः वह जो लाभ के लिए वस्तुओं का विक्रय करता है।

संरचित प्रश्नावलीः संरचित प्रश्नावली में परिमितोत्तर प्रश्न होते हैं, जिनके लिए चुनने के लिए वैकल्पिक संभव उत्तर दिए होते हैं।

स्थिरांकः स्थिरांक एक मात्रा है जिसका उपयोग किसी गुण के वर्णन करने के लिए किया जाता है। परंतु परिकलन के दौरान यह परिवर्तित नहीं होता।

समावेशी विधिः प्रेक्षणों के वर्गीकरण की ऐसी विधि जिसमें वर्ग की ऊपरी वर्ग सीमा के बराबर प्रेक्षणों को उसी वर्ग में रखते हैं।

समष्टिः समष्टि का अर्थ है वे सभी व्यष्टि/इकाइयाँ जिनके बारे में सूचना प्राप्त करनी है।

सूचकः व्यष्टि/इकाई जिससे इष्ट सूचना प्राप्त की जाती है।

सेवाधारीः वह जो किसी कार्य के लिए अथवा किसी अन्य व्यक्ति के लिए कार्य करने के लिए भुगतान प्राप्त करता है।

सेवा प्रदाताः वह जो भुगतान लेकर दूसरों को सेवा प्रदान करता है।

सांख्यिकीः अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए आँकड़ों के संग्रह, संगठन, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषण करने की विधि। इसका अभिप्राय आँकड़ों से भी है।

सापेक्ष बारंबारताः कुल बारंबारता के अनुपात अथवा प्रतिशत के रूप में किसी वर्ग की बारंबारता।

संतत चरः ऐसा मात्रात्मक चर जिसका कोई भी संख्यात्मक मान हो सकता है।

शतमकः ऐसा मान जो आँकड़ों को सौ बराबर भागों में बाँट देता है, इसलिए आँकड़ों में 99 शतमक होते हैं।

दो अंकों के बेतरतीब अंक

03 47 43 73 86	36 96 47 36 61	46 98 63 71 62	33 26 16 80 45	60 11 14 10 95
97 74 24 67 62	42 81 14 57 20	42 53 32 37 32	27 07 36 07 51	24 51 79 89 73
16 76 62 27 66	56 50 26 71 07	32 90 79 78 53	13 55 38 58 59	88 97 54 14 10
12 56 85 99 26	96 96 68 27 31	05 03 72 93 15	57 12 10 14 21	88 26 49 81 76
55 59 56 35 64	38 54 82 46 22	31 62 43 09 90	06 18 44 32 53	23 83 01 30 30
16 22 77 94 39	49 54 43 54 82	17 37 93 23 78	87 35 20 96 43	84 26 34 91 64
84 42 17 53 31	57 24 55 06 88	77 04 74 47 67	21 76 33 50 25	83 92 12 06 76
63 01 63 78 59	16 95 55 67 19	98 10 50 71 75	12 86 73 58 07	44 39 52 38 79
33 21 12 34 29	78 64 56 07 82	52 42 07 44 38	15 51 00 13 42	99 66 02 79 54
57 60 86 32 44	09 47 27 96 54	49 17 46 09 62	90 52 84 77 27	08 02 73 43 28
18 18 07 92 46	44 17 16 58 09	79 83 86 19 62	06 76 50 03 10	55 23 64 05 05
26 62 38 97 75	84 16 07 44 99	83 11 46 32 24	20 14 85 88 45	10 93 72 88 71
23 42 40 64 74	82 97 77 77 81	07 45 32 14 08	32 98 94 07 72	93 85 79 10 75
52 36 28 19 95	50 92 26 11 97	00 56 76 31 38	80 22 02 53 53	86 60 42 04 53
37 85 94 35 12	83 39 50 08 30	42 34 07 96 88	54 42 06 87 98	35 85 29 48 39
70 29 17 12 13	40 33 20 38 26	13 89 51 03 74	17 76 37 13 04	07 74 21 19 30
56 62 18 37 35	96 83 50 87 75	97 12 25 93 47	70 33 24 03 54	97 77 46 44 80
99 49 57 22 77	88 42 95 45 72	16 64 36 16 00	04 43 18 66 79	94 77 24 21 90
16 08 15 04 72	33 27 14 34 09	45 59 34 68 49	12 72 07 34 45	99 27 72 95 14
31 16 93 32 43	50 27 89 87 19	20 15 37 00 49	52 85 66 60 44	38 68 88 11 80
68 34 30 13 70	55 74 30 77 40	44 22 78 84 26	04 33 46 09 52	68 07 97 06 57
74 57 25 65 76	59 29 97 68 60	71 91 38 67 54	13 58 18 24 76	15 54 55 95 52
27 42 37 86 53	48 55 90 65 72	96 57 69 36 10	96 46 92 42 45	97 60 49 04 91
00 39 68 29 61	66 37 32 20 30	77 84 57 03 29	10 45 65 04 26	11 04 96 67 24
29 94 98 94 24	68 49 69 10 82	53 75 91 93 30	34 25 20 57 27	40 48 73 51 92
16 90 82 66 59	83 62 64 11 12	67 19 00 71 74	60 47 21 29 68	02 02 37 03 31
11 27 94 75 06	06 09 19 74 66	02 94 37 34 02	76 70 90 30 86	38 45 94 30 38
35 24 10 16 20	33 32 51 26 38	79 78 45 04 91	16 92 53 56 16	02 75 50 95 98
38 23 16 86 38	42 38 97 01 50	87 75 66 81 41	40 01 74 91 62	48 51 84 08 32
31 96 25 91 47	96 44 33 49 13	34 86 82 53 91	00 52 43 48 85	27 55 26 89 62
66 67 40 67 14	64 05 71 95 86	11 05 65 09 68	76 83 20 37 90	57 16 00 11 66
14 90 84 45 11	75 73 88 05 90	52 27 41 14 86	22 98 12 22 08	07 52 74 95 80
68 05 51 18 00	33 96 02 75 19	07 60 62 93 55	59 33 82 43 90	49 37 38 44 59
20 46 78 73 90	97 51 40 14 02	04 02 33 31 08	39 54 16 49 36	47 95 93 13 30
64 19 58 97 79	15 06 15 93 20	01 90 10 75 06	40 78 78 89 62	02 67 74 17 33
05 26 93 70 60	22 35 85 15 13	92 03 51 59 77	59 56 78 06 83	52 91 05 70 74
07 97 10 88 23	09 98 42 99 64	61 71 62 99 15	06 51 29 16 93	58 05 77 09 51
68 71 86 85 85	54 87 66 47 54	73 32 08 11 12	44 95 92 63 16	29 56 24 29 48
26 99 61 65 53	58 37 78 80 70	42 10 50 67 42	32 17 55 85 74	94 44 67 16 94
14 65 52 68 75	87 59 36 22 41	26 78 63 06 55	13 08 27 01 50	15 29 39 39 43

परिशिष्ट ब (क्रमशः)

17 53 77 58 71	71 41 61 50 72	12 41 94 96 26	44 95 27 36 99	02 96 74 30 83
90 26 59 21 19	23 52 23 33 12	96 93 02 18 39	07 02 18 36 07	25 99 32 70 23
41 23 52 55 99	31 04 49 69 96	10 47 48 45 88	13 41 43 89 20	97 17 14 49 17
60 20 50 81 69	31 99 73 68 68	35 81 33 03 76	24 30 12 48 60	18 99 10 72 34
91 25 38 05 90	94 58 28 41 36	45 37 59 03 09	90 35 57 29 12	82 62 54 65 60
34 50 57 74 37	98 80 33 00 91	09 77 93 19 82	74 94 80 04 04	45 07 31 66 49
85 22 04 39 43	73 81 53 94 79	33 62 46 86 28	08 31 54 46 31	53 94 13 38 47
09 79 13 77 48	73 82 97 22 21	05 03 27 24 83	72 89 44 05 60	35 80 39 94 88
88 75 80 18 14	22 95 75 42 49	39 32 82 22 49	02 48 07 70 37	16 04 61 67 87
90 96 23 70 00	39 00 03 06 90	55 85 78 38 36	94 37 30 69 32	90 89 00 76 33
53 74 23 99 67	61 32 28 69 84	94 62 67 86 24	98 33 41 19 95	47 53 53 38 09
63 38 06 86 54	99 00 65 26 94	02 82 90 23 07	79 62 67 80 60	75 91 12 81 19
35 30 58 21 46	06 72 17 10 94	25 21 31 75 96	49 28 24 00 49	55 65 79 78 07
63 43 36 82 69	65 51 18 37 88	61 38 44 12 45	32 92 85 88 65	54 34 81 85 35
98 25 37 55 26	01 91 82 81 46	74 71 12 94 97	24 02 71 37 07	03 92 18 66 75
02 63 21 17 69	71 50 80 89 56	38 15 70 11 48	43 40 45 86 98	00 83 26 91 03
64 55 22 21 82	48 22 28 06 00	61 54 13 43 91	82 78 12 23 29	06 66 24 12 27
85 07 26 13 89	01 10 07 82 04	59 63 69 36 03	69 11 15 83 80	13 29 54 19 28
58 54 16 24 15	51 54 44 82 00	62 61 65 04 69	38 18 65 18 97	85 72 13 49 21
34 85 27 84 87	61 48 64 56 26	90 18 48 13 26	37 70 15 42 57	65 65 80 39 07
03 92 18 27 46	57 99 16 96 56	30 33 72 85 22	84 64 38 56 98	99 01 30 98 64
62 95 30 27 59	37 75 41 66 48	86 97 80 61 45	23 53 04 01 63	45 76 08 64 27
08 45 93 15 22	60 21 75 46 91	98 77 27 85 42	28 88 61 08 84	69 62 03 42 73
07 08 55 18 40	45 44 75 13 90	24 94 96 61 02	57 55 66 83 15	73 42 37 11 61
01 85 89 95 66	51 10 19 34 88	15 84 97 19 75	12 76 39 43 78	64 63 91 08 25
72 84 71 14 35	19 11 58 49 26	50 11 17 17 76	86 31 57 20 18	95 60 78 46 75
88 78 28 16 84	13 52 53 94 53	75 45 69 30 96	73 89 65 70 31	99 17 43 48 76
45 17 75 65 57	28 40 19 72 12	25 12 74 75 67	60 40 60 81 19	24 62 01 61 16
96 76 28 12 54	22 01 11 94 25	71 96 16 16 88	68 64 36 74 45	19 59 50 88 92
43 31 67 72 30	24 02 94 08 63	38 32 36 66 02	69 36 38 25 39	48 03 45 15 22
50 44 66 44 21	66 06 58 05 62	68 15 54 35 02	42 35 48 96 32	14 52 41 52 48
22 66 22 15 86	26 63 75 41 99	58 42 36 72 24	58 37 52 18 51	03 37 18 39 11
96 24 40 14 51	23 22 30 88 57	95 67 47 29 83	94 69 40 06 07	18 16 36 78 86
31 73 91 61 19	60 20 72 93 48	98 57 07 23 69	65 95 39 69 58	56 80 30 19 44
78 60 73 99 84	43 89 94 36 45	56 69 47 07 41	90 22 91 07 12	78 35 34 08 72
84 37 90 61 56	70 10 23 98 05	85 11 34 76 60	76 48 45 34 60	01 64 18 39 96
36 67 10 08 23	98 93 35 08 86	99 29 76 29 81	33 34 91 58 93	63 14 52 32 52
07 28 59 07 48	89 64 58 89 75	83 85 62 27 89	30 14 78 56 27	86 63 59 80 02
10 15 83 87 60	79 24 31 66 56	21 48 24 06 93	91 98 94 05 49	01 47 59 38 00
55 19 68 97 65	03 73 52 16 56	00 53 55 90 27	33 42 29 38 87	22 13 88 83 34
53 81 29 13 39	35 01 20 71 34	62 33 74 82 14	53 73 19 09 03	56 54 29 56 93
51 86 32 68 92	33 98 74 66 99	40 14 71 94 58	45 94 19 38 81	14 44 99 81 07
35 91 70 29 13	80 03 54 07 27	96 94 78 32 66	50 95 52 74 33	13 80 55 62 54
37 71 67 95 13	20 02 44 95 94	64 85 04 05 72	01 32 90 76 14	53 89 74 60 41
93 66 13 83 27	92 79 64 64 72	28 54 96 53 84	48 14 52 98 94	56 07 93 89 30

सांख्यिकीः इनके विचार से

☞ सांख्यिकी सामान्य बुद्धि का स्थानापन्न नहीं हैं!

हेनरी क्ले

☞ मुझे औसतों पर विश्वास नहीं, मैं व्यक्तिगत उदाहरणों को पसंद करता हूँ। किसी व्यक्ति को एक दिन में छः बार खाना मिले और दूसरे दिन एक बार भी नहीं। इस प्रकार उसे प्रतिदिन औसत रूप से तीन बार भोजन तो मिला, परन्तु जीने का आदर्श तरीका यह नहीं!

लुई डी. ब्रांडीस

☞ मौसम विभाग कभी गलत नहीं होता। मान लें, वहाँ से सूचना मिलती है कि वर्षा की 80 प्रतिशत संभावना है। यदि वर्षा होती है तो 80 प्रतिशत भविष्यवाणी सच होती है, यदि नहीं तो 20 प्रतिशत भविष्यवाणी!

सौल बैरॉन

☞ किसी व्यक्ति की मृत्यु एक दुःखद घटना है, जबकि एक लाख व्यक्तियों की मृत्यु आँकड़े हैं!

जोसेफ स्टालिन

☞ किसी डॉक्टर को सांख्यिकीविद् की तुलना में अधिक सम्मान क्यों मिलता है? इसलिए कि डॉक्टर किसी जटिल बीमारी का विश्लेषण करते हैं, जबकि सांख्यिकीविद् विश्लेषण को जटिल बना आपको बीमार कर दते हैं!

गैरी सी. रामसेयर

प्यारे बच्चो!

यदि कोई आपको अनुचित ढंग से स्पर्श करे और यह स्पर्श आपको अच्छा न लगे तो, आप चुप न रहें। आप

1. स्वयं को इसका दोष न दें;
2. इस बारे में किसी ऐसे व्यक्ति को बताएँ जिस पर आप भरोसा करते हो;
3. आप पॉक्सो ई.बॉक्स के माध्यम से राष्ट्रीय बाल अधिकार संरक्षण आयोग को भी इस बारे में सूचित कर सकते हैं।

जब आपको कोई अनुचित ढंग से स्पर्श करता है तो आपको बुरा लग सकता है, आप दुविधाग्रस्त और असहाय अनुभव कर सकते हैं
आपको "बुरा" अनुभव करने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि आपकी गलती नहीं है

इस बटन को दबाएँ

पॉक्सो ई.बॉक्स NCPCR@gov.in पर उपलब्ध है।

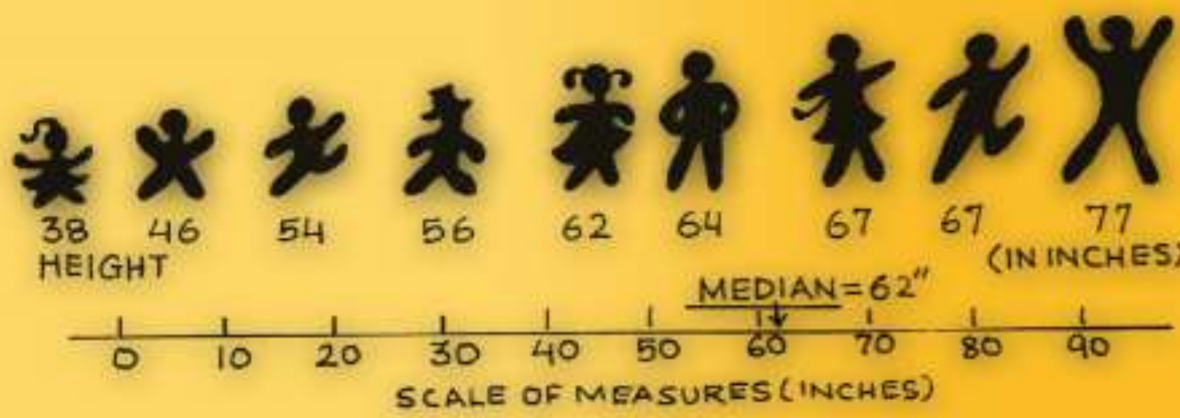
यदि आपकी आयु 18 वर्ष से कम है और आप मुसीबत में हैं अथवा दुविधाग्रस्त हैं अथवा आपके साथ दुर्व्यवहार किया गया है अथवा संकट में हैं अथवा किसी ऐसे बच्चे को जानते हैं...

1098 पर कॉल करें...क्योंकि कुछ अच्छे नंबर जीवन बदल देते हैं।

चाइल्ड लाइन 1098 - विपत्ति में बच्चों के लिए 24 घंटे निःशुल्क राष्ट्रीय आपातकालीन फ़ोन सेवा, महिला एवं बाल विकास मंत्रालय के सहयोग से चाइल्ड लाइन इंडिया फ़ाउंडेशन की पहल है।

स्वच्छ भारत

एक कदम स्वच्छता की ओर



11099

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ISBN 81-7450-521-0